

34. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen Klasse 5

340521 Lösung:

10 Punkte

Nach (1) heißt Pfeifer weder Fritz noch Erich, nach (2) heißt er auch nicht Dieter. Daher gilt:

Pfeifer heißt Gert. (3)

Nach (1) heißt Meier weder Fritz noch Erich, nach (3) heißt er auch nicht Gert. Daher gilt:

Meier heißt Dieter. (4)

Nach (2) heißt Neumann nicht Erich, nach (3) und (4) heißt er weder Gert noch Dieter. Daher gilt:

Neumann heißt Fritz. (5)

Wegen (3), (4), (5) verbleibt schließlich nur:

Opitz heißt Erich. (6)

Damit ist gezeigt, daß die Vornamen zu den Familiennamen eindeutig bestimmt sind, und diese zusammengehörenden Namen sind angegeben.

Bemerkungen: Zur Lösungsfindung kann man Tabellen verwenden, die alle Möglichkeiten zusammengehörender Namen zeigen. Darin kann man z. B. mit einem „+“ oder „-“ kennzeichnen, daß eine Möglichkeit ausscheidet bzw. stattfindet. Man kann auch *über* einem solchen Zeichen angeben, *woraus es folgt*, und *darunter*, was *damit bewiesen* ist. Eine solche Lösungsdarstellung bieten etwa die Tabellen:

	M	N	O	P
D		(2) -		(2) -
E	(1) -	(1) -		(1),(2) -
F	(1) -			(1) -
G				+ (3)

	M	N	O	P
D	+ (4)	-		-
E	-	-		-
F	-	+ (5)		-
G	(3) -	(3) -	(3) -	+ -

	M	N	O	P
D		-	(4) -	-
E	-	-	+ (6)	-
F	-	+	(5) -	-
G	-	-	-	+ -

Bei der Einschätzung tabellarischer Schülerlösungen sollte berücksichtigt werden, ob bzw. wie weit aus der Darstellung die Stichhaltigkeit der Herleitung ersichtlich ist.

340522 Lösung:

10 Punkte

Abb. L 340522 zeigt Zeichnungen der geforderten Art.

Bemerkungen: Die Hervorhebung (Schraffur) von Flächen wird natürlich nicht vom Schüler verlangt. Gefordert wird die mit Zeichengenauigkeit vorliegende Kongruenz der Teilflächen.

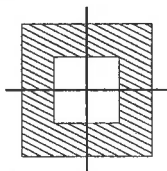


Abb. L 340522 a₁

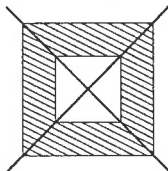


Abb. L 340522 a₂

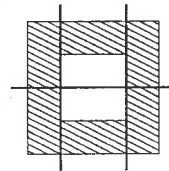


Abb. L 340522 b

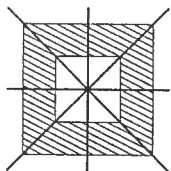


Abb. L 340522 c

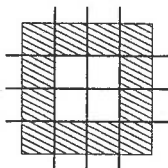


Abb. L 340522 d₁

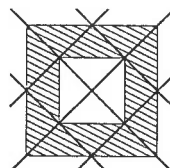


Abb. L 340522 d₂

340523 Lösung:

10 Punkte

(a) Die gesuchten Darstellungen sind:

$$\begin{array}{llll}
 4 = 1+1+1+1 & 5 = 1+1+1+1+1 & 6 = 1+1+1+1+1+1 & = 1+1+2+2 \\
 = 1+1+2 & = 1+1+1+2 & = 1+1+1+1+2 & = 1+2+1+2 \\
 = 1+2+1 & = 1+1+2+1 & = 1+1+1+2+1 & = 1+2+2+1 \\
 = 2+1+1 & = 1+2+1+1 & = 1+1+2+1+1 & = 2+1+1+2 \\
 = 2+2, & = 2+1+1+1 & = 1+2+1+1+1 & = 2+1+2+1 \\
 & = 1+2+2 & = 2+1+1+1+1 & = 2+2+1+1 \\
 & = 2+1+2 & & = 2+2+2. \\
 & = 2+2+1, & &
 \end{array}$$

(b) Als Anzahlen erhält man:

Darzustellende Zahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Darstellungen	1	2	3	5	8	13

Für sie gilt folgende Gesetzmäßigkeit: Die Summe zweier benachbarter Anzahlen ist gleich der darauffolgenden Anzahl.

Wenn diese Gesetzmäßigkeit allgemein gilt, so erhält man als Fortsetzung:

Darzustellende Zahl	7	8	9	10
Anzahl der Darstellungen	8+13=21	13+21=34	21+34=55	34+55=89

Für die Zahl 10 muß es dann also genau 89 Darstellungen geben.

Hinweis zur Korrektur: Falls in einer Schülerlösung eine Gesetzmäßigkeit genannt wird, die zwar für die richtigen Darstellungsanzahlen der Zahlen 1, 2, ..., 6 gilt, aber nicht allgemein, und falls dann durch korrekte Schlüsse aus dieser Gesetzmäßigkeit eine (möglicherweise als Darstellungsanzahl falsche) Angabe für die Zahl 10 hergeleitet wird, so ist die betreffende Anforderung des Aufgabentextes (Teilaufgabe (b), letzter Satz) als erfüllt einzuschätzen. Freilich empfiehlt es sich dann, den Schüler - falls eine solche Rückkopplung möglich ist - auf den Sachverhalt aufmerksam zu machen.

340524 Lösung:

10 Punkte

(a) Werden rechts noch drei leere Flaschen dazugestellt, so stehen sowohl links als auch rechts je zwei volle und drei leere Flaschen; also tritt Gleichgewicht ein. Die gesuchte Anzahl ist somit 3.

- (b) Denkt man sich in Abb. A 340524 auf beiden Waagschalen das Gewicht von zwei leeren Flaschen entfernt, so folgt: Drei leere Flaschen haben dasselbe Gewicht wie das Mineralwasser, das zwei Flaschen füllt. Daraus ergibt sich die Aussage: *Eine leere Flasche hat ein kleineres Gewicht als das Wasser für eine Flasche.* Da Jan links die Flasche und rechts das Wasser wegnimmt und vorher Gleichgewicht herrschte, neigt sich nun die linke Waagschale nach unten.
- (c) Die Aufstellung, die Pia vornimmt, kann stattdessen auch aus der nach (b) erreichten Aufstellung erhalten werden, indem man dort links und rechts je eine leere Flasche wegnimmt. Daher neigt sich auch bei Pias Aufstellung die linke Waagschale nach unten.

Andere Lösungsmöglichkeiten entstehen, wenn man die Angaben des Aufgabentextes in Gleichungen überführt und diese auflöst. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten dafür, welche Größen als Unbekannte eingeführt werden, z. B. das Gewicht f einer leeren Flasche und das Gewicht w des Wassers für eine Flasche. Eine andere Möglichkeit ist:

Für das Gewicht f einer leeren Flasche und das Gewicht g einer gefüllten Flasche gilt

$$5f = 2g. \quad (1)$$

In (a) entsteht links $3f + 2g$, also muß dies auch rechts erreicht werden, d. h., das Gewicht rechts ist um $3f$ zu erhöhen.

Zu (b) und (c) löst man (1) etwa nach g auf: $g = \frac{5}{2}f$.

In (b) entsteht links $(2f + 2g =) 7f$, rechts $(4f + g =) 6\frac{1}{2} \cdot f$;

in (c) entsteht links $(f + 2g =) 6f$, rechts $(3f + g =) 5\frac{1}{2} \cdot f$;

in beiden Fällen links mehr als rechts.

Vorschläge zur Punktverteilung

<u>340521</u>	
Ermittlung der ersten beiden Vornamen: je 3 Punkte	6
Ermittlung der letzten beiden Vornamen: je 2 Punkte	4
	<u>10</u>

<u>340522</u>	
Vier Zeichnungen (falls mehr vorliegen, die vier aufwendigsten): je 2 Punkte	8
Weitere zwei Zeichnungen: je 1 Punkt	2
	<u>10</u>

<u>340523</u>	
(a) Angabe der Darstellungen von 4, 5, 6 (etwa: 1+2+2 Punkte)	5
(b) Angabe einer für die Darstellungsanzahlen von 1, 2, ..., 6 geltenden Gesetzmäßigkeit ..	3
Ermittlung der aus dieser Gesetzmäßigkeit folgenden Darstellungsanzahl von 10	2
	<u>10</u>

<u>340524</u>	
(a) Ermittlung der Anzahl 3	2
(b) Gewinnung einer weiter nutzbaren Beziehung (Ungleichung oder Gleichung zwischen betrachteten Größen)	2
Abschließende Herleitung der Aussage, daß links das größere Gewicht ist	2
(c) Entsprechende Herleitung, etwa analog aufgeteilt in 2+2 Punkte	4
	<u>10</u>