

33. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe
 Lösungen
 Olympiadeklasse 5

330521 Lösung:8 Punkte

Am linken Straßenrand muß genau eine Laterne mehr als am rechten Straßenrand stehen. Zählt man am linken Straßenrand die Laterne am Ende der Straße nicht mit, so stehen auf beiden Seiten der Straße gleich viele Laternen, also $46:2 = 23$ Stück. Also ist die Straße $23 \cdot 35 \text{ m} = 805 \text{ m}$ lang.

330522 Lösung:11 Punkte

Die Tausenderziffer einer gesuchten Zahl kann nicht 0 sein, da die Zahl sonst nicht vierstellig wäre. Ist die Tausenderziffer 1, 2 oder 3, so kann die Hunderterziffer nicht um 4 kleiner sein, sie muß also um 4 größer sein, d.h. 5, 6 bzw. 7 lauten. Bei der Tausenderziffer 6, 7, 8 bzw. 9 kann die Hunderterziffer nicht um 4 größer sein. Nur wenn die Tausenderziffer 4 oder 5 lautet, ist jeweils sowohl die um 4 kleinere als auch die um 4 größere Hunderterziffer möglich.

Ähnlich gibt es zu den Hunderterziffern 0, 1, 2 nur die um 3 größere und zu 7, 8, 9 nur die um 3 kleinere Zehnerziffer, während für die Hunderterziffern 3, 4, 5, 6 beide Möglichkeiten bestehen. Daher gibt es genau die folgenden Möglichkeiten, die ersten drei Ziffern gesuchter Zahlen zusammenzustellen:

158, 152, 269, 263, 374, 403, 485, 514,
 596, 625, 730, 736, 841, 847, 958, 952.

Da in jeder dieser 16 Zusammenstellungen genau drei verschiedene Ziffern auftreten, gibt es jedesmal für die noch fehlende Einerziffer genau 7 Möglichkeiten. Die Anzahl aller Zahlen der gesuchten Art beträgt daher $7 \cdot 16 = 112$.

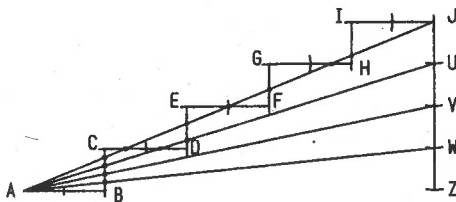
330523 Lösung:9 Punkte

Abb. L 330523

a) Abb. L 330523 zeigt die zu konstruierende Figur; zusätzlich wurden die Strecken AJ, AU, AV, AW konstruiert.

Als gesuchte Anzahlen von Schnittpunkten sind daran ersichtlich:

- b) 7, c) 3,
 d) 1, e) 1.

330524 Lösung:12 Punkte

Die auszurechnende Zahl kann nur dann größer als 30 sein, wenn mindestens in einem der beiden Kästchen zwischen 9 und 9 bzw. zwischen 9 und 3 das Zeichen \cdot steht.

Steht es zwischen 9 und 3, so kann davor nicht $-$ stehen (es würde eine zu große Zahl subtrahiert), aber auch nicht \cdot (denn 1 durch eine Rechenoperation $+$, $-$ oder \cdot mit $9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$ verbunden gibt kein Ergebnis zwischen 30 und 100). Also muß davor dann $+$ stehen. Ferner kann dann zwischen 1 und 9 nicht $-$ stehen (wieder würde eine zu große Zahl subtrahiert).

Steht das Zeichen \cdot zwischen 9 und 9, so kann danach nur $+$ oder $-$ stehen (weil \cdot eben schon widerlegt wurde) und davor nicht $-$ (es würde eine zu große Zahl subtrahiert).

Also entstehen genau bei den Ersetzungen

$$1+9+9 \cdot 3 = 37, \quad 1 \cdot 9+9 \cdot 3 = 36,$$

$$1+9 \cdot 9+3 = 85, \quad 1 \cdot 9 \cdot 9+3 = 84, \quad 1+9 \cdot 9-3 = 79, \quad 1 \cdot 9 \cdot 9-3 = 78$$

auszurechnende Zahlen zwischen 30 und 100.

Mit der Summe s dieser Zahlen ergeben die weiteren geforderten Additionen:

$$\begin{aligned} s &= 37 + 36 + 85 + 84 + 79 + 78 = 399 \\ &\quad 36 \cdot 37 = 1332 \\ a + b + c &= 4 + 15 + 243 = 262 \end{aligned}$$

1993

Vorschläge zur Punktverteilung:330521

Ersichtliche Aufteilung: Links eine Laterne mehr	3
Ersichtliche Berücksichtigung von 23 Teilstrecken	3
Abschließende Berechnung der Straßenlänge	2
	<u>8</u>

330522

Ermittlung aller Zusammenstellungen der ersten 3 Ziffern:

Ersichtliche Berücksichtigung aller Möglichkeiten in den Fällen (1,2,3), (4,5), (6,7,8,9) der Tausenderziffer	4
Ersichtliche Berücksichtigung aller Möglichkeiten in den Fällen (0,1,2), (3,4,5,6), (7,8,9) der Hunderterziffer	3

Berücksichtigung, daß jeweils 7 Einerziffern möglich sind, abschließende Ermittlung der Anzahl 112	4
	<u>11</u>

330523

Korrekt ausgeführte Konstruktion, etwa je 3 Pkte. für grundsätzliche Richtigkeit, Genauigkeit der Ausführung	6
Finden der Schnittpunktzahlen	3
	<u>9</u>

330524

Ermittlung der zu berechnenden Zahlen zwischen 30 und 100:

Finden der beiden Fälle mit \cdot zwischen 9 und 3	2
Finden der vier Fälle mit \cdot zwischen 9 und 9	3
Berechnung der sechs Zahlen	3
Finden der beiden kleinsten, Berechnung ihres Produktes	2
Berechnung von a, b, c , abschließende Summation	2
	<u>12</u>