

310521 Lösung:

8 Punkte

Alle Reihen, von denen zu a) eine zu nennen ist, sind:

bgbrb , bgbrgrb , bgrbrgb , bgrgbrb .

Möglichst große Länge haben, also in b) zu nennen sind die drei letzten.

Bemerkung: Zum Auffinden der Reihen kann man, ausgehend von dem Beginn bg , an eine jeweils schon erhaltene Teilreihe alle möglichen Fälle der Fortsetzung aufsuchen. Dabei gibt es stets genau die folgenden Fälle: Kommt in der betreffenden Teilreihe die letzte Farbe genau dieses eine Mal vor, so stehen die beiden anderen Farben für zwei verschiedene Fortsetzungsmöglichkeiten zur Verfügung. Kommt die letzte Farbe schon insgesamt zweimal vor, so gibt es nur noch eine Fortsetzung; kommt die letzte Farbe dreimal vor, so kann die Reihe nicht mehr fortgesetzt werden. Ausführungen dieser Art werden nicht vom Schüler verlangt.

310522 Lösung:

11 Punkte

Abb. L 310522 zeigt eine verlangte Konstruktion.

(Die zu konstruierenden Punkte A' , B' , C' , P_2' sind eindeutig bestimmt, für die Wahl von Hilfslinien gibt es verschiedene Möglichkeiten. Das Konstruieren einer Parallelen braucht nicht mit Zirkel und Lineal ausgeführt zu sein; d.h., es braucht hierzu - bei Konstruktion mit Lineal und Zeichendreieck - keine weitere Hilfslinie aufzutreten.)

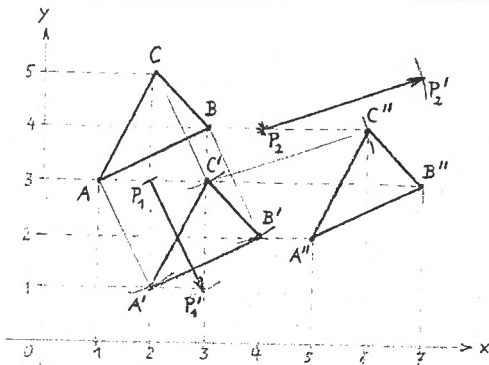


Abb. L 310522

310523 Lösung:

9 Punkte

Mit A,B,C,E,F seien die Laufzeiten von Achim, Bernd, Christian, Emil bzw. Frank bezeichnet. Die Aussagen (4) und (1) können nur bei der Reihenfolge

$$F < A < C$$

von Achim, Christian und Frank wahr sein. Nach (3) gibt es für die Reihenfolge von Bernd und Frank nur die beiden Möglichkeiten $B < F$ bzw. $B = F$, für Achim, Bernd, Christian und Frank also nur

$$B < F < A < C, \quad (5)$$

$$B = F < A < C. \quad (6)$$

Sowohl zu (5) als auch zu (6) gibt es nur zwei Möglichkeiten, auch (2) zu erfüllen: Entweder ist E an die dritte Stelle zwischen F und A einzufügen oder an die vierte Stelle zwischen A und C. Also gibt es dafür, daß Gerts Aussagen wahr sind, nur die vier Möglichkeiten

$$B < F < E < A < C,$$

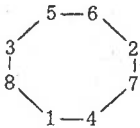
$$B < F < A < E < C,$$

$$B = F < E < A < C,$$

$$B = F < A < E < C.$$

310524 Lösung:

12 Punkte



a) Das Vorhaben ist erfüllbar. Ein mögliches Beispiel zeigt Abb. L 310524; die acht Summen sind

$$8+1+4 = 13, \quad 1+4+7 = 12, \quad 4+7+2 = 13,$$

$$7+2+6 = 15, \quad 2+6+5 = 13, \quad 6+5+3 = 14,$$

$$5+3+8 = 16, \quad 3+8+1 = 12.$$

Abb. L 310524

b) 1.Lösungsweg: Bei jeder Verteilung der Zahlen 1,2,...,8 auf die Ecken gibt es von den drei Zahlen 1,2,3 mindestens zwei, zwischen denen keine oder nur eine Ecke liegt (denn lägen sowohl zwischen 1 und 2 als auch zwischen 1 und 3 als auch zwischen 2 und 3 jeweils mindestens zwei Ecken, so gäbe es insgesamt mindestens $3 + 3 \cdot 2 = 9$ Ecken). Bei jeder Verteilung hat daher eine der acht zu bildenden Summen zwei Summanden aus den drei Zahlen 1,2,3, der dritte Summand ist nicht größer als 8; diese Summe ist also nicht größer als $2+3+8 = 13$.

Damit ist bewiesen: Es ist nicht möglich, die Zahlen so zu verteilen, daß jede der zu bildenden Summen größer als 13 ist.

2.Lösungsweg: Für jede Verteilung gilt: Addiert man die acht zu bildenden Summen, so wird dabei jede der Zahlen 1,2,...,8 genau dreimal erfaßt (nämlich einmal als Zahl an einer Ecke selbst, einmal als Zahl an einer linken Nachbarecke und einmal als Zahl an einer rechten Nachbarecke). Dabei entsteht also stets das Ergebnis $3 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8) = 3 \cdot 36 = 108$. Dagegen müßte dieses Ergebnis bei einer Verteilung, bei der jede der acht Summen größer als 13 wäre, mindestens $8 \cdot 14 = 112$ betragen. Dieser Widerspruch zeigt, daß eine solche Verteilung nicht möglich ist.

Vorschläge zur Punktverteilung

<u>310521</u>	
a) Angabe einer der Würfelreihen, die die Bedingungen erfüllen	3
b) Angabe der drei aus 7 Würfeln bestehenden unter diesen Reihen: Zwei Reihen je 2 P., die dritte 1 P.	5
	8
<u>310522</u>	
a) Konstruktion von A'B'C', so daß die Eigenschaft, Bild von ABC bei der geforderten Verschiebung zu sein, aus der Zeichnung hervorgeht	5
b) Konstruktion von P ₂ ', so daß die Eigenschaft, Endpunkt des geforderten Verschiebungspfeils zu sein, aus der Zeichnung hervorgeht	6
(In beiden Teilaufgaben geht auch die Qualität der Konstruktionszeichnung in die Bewertung ein.)	
	11
<u>310523</u>	
Angabe der vier Möglichkeiten	3
Herleitung, daß (1)-(4) nur bei diesen Möglichkeiten erfüllt sind: Berücksichtigung von [(1) und (4)], von (3), von (2) etwa je 2 P.	6
	9
<u>310524</u>	
a) Angabe eines Beispiels und ersichtliche Bestätigung, daß alle acht Summen größer als 11 sind	4
b) Ersichtliches Auffinden eines zum Unmöglichkeitbeweis führenden Motivs, z.B. Existenz einer Summe mit zwei Summanden ≤ 2 und ≤ 3 , oder Addition aller acht Summen (bzw. gleichwertige Durchschnittsbetrachtung)	4
Ausführung des Motivs bis zum erfolgten Unmöglichkeitbeweis	4
	12