A 11/12;I

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

241231

Man ermittle die ersten sechs Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_6$ von allen denjenigen Folgen (a_n) reeller Zahlen, die die nachstehenden Eigenschaften (1) bis (5) haben:

(1) Es gilt $a_1 = -\frac{5}{2}$.

(2) Es gilt $a_5 = 3$.

(3) a_1, a_2, a_3, a_4 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge.

(4) a_4, a_5, a_6 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer geometrischen Zahlenfolge.

(5) Die Summe der ersten sechs Glieder der Folge (a_n) beträgt $\frac{13}{2}$.

241232

Man beweise: Wenn die Seitenlängen eines Dreiecks ABC nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann gilt:

a) ABC ist ein spitzwinkliges Dreieck.

b) Die Längen der Höhen des Dreiecks ABC sind nicht kleiner als $\sqrt{2}$.

Von den nachstehenden Aufgaben 241233A und 241233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

241233A

Man ermittle alle Funktionen f mit den folgenden Eigenschaften:

(1) f ist für alle rationalen Zahlen definiert.

(2) Es gilt f(1) = 1.

(3) Für alle rationalen Zahlen x und y gilt

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y).$$

241233B

Man ermittle zu jeder geraden natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) = (x+n)(x+n+1)(x+n+2)\cdots(x+2n-1).$$

A 11/12;II

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

241234

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen z mit $1 \leq z \leq 5$, die die Bedingung erfüllen, daß die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x + z$ und die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ mindestens einen Schnittpunkt mit ganzzahliger Abszisse haben.
Zu jeder Zahl z, die diese Bedingung erfüllt, gebe man - für die betreffende Gerade und die Parabel - die Koordinaten aller Schnittpunkte mit ganzzahliger Abszisse an.

241235

Man ermittle alle diejenigen Tripel (a,b,c) positiver natürlicher Zahlen, für die $a^b + b^c = abc$ gilt.

241236

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die

$$99^n + 101^n > \frac{51}{25} \cdot 100^n \qquad (1)$$

gilt.

L 11/12;I

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11 und 12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

241231) Lösung: 5 Punkte

I. Wenn (a_n) eine Folge reeller Zahlen mit den Eigenschaften (1) bis (5) ist, so folgt:

Nach (3) und (4) gibt es Zahlen d und q mit

$a_2=a_1+d,\ a_3=a_1+2d,\ a_4=a_1+3d,\ a_5=(a_1+3d)q,\ a_6=(a_1+3d)q^2.$ (6)

Aus (6) und (1), (2) folgt

$a_1+\ldots+a_6=4a_1+6d+(a_1+3d)q\cdot(1+q) = -10 + 6d + 3\cdot(1+q).$

Damit ergibt (5) die Gleichung

$-7 + 6d + 3q = \frac{13}{2}.$ (7)

Nochmals nach (2), (6) und (1) ist

$6 = 2(a_1+3d)q = -5q + 6dq.$ (8)

Multipliziert man (7) mit q und addiert (8), so folgt

$-7q + 6dq + 3q^2 + 6 = \frac{13}{2}q - 5q + 6dq,$

$q^2 - \frac{17}{6}q + 2 = 0.$ (9)

Daraus folgt, daß q eine der Zahlen

$$q_{1;2} = \frac{17}{12} \pm \sqrt{\frac{289}{144} - 2} = \frac{17}{12} \pm \frac{1}{12},$$

d. h. $q_1 = \frac{3}{2},\ q_2 = \frac{4}{3}$ (10)

ist. Nach (7), also $d = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}q$, gehören hierzu für d die Werte

$d_1 = \frac{3}{2}$ bzw. $d_2 = \frac{19}{12}.$ (11)

Damit ergibt sich aus (1) und (6), daß eine Folge (a_n) nur dann die Eigenschaften (1) bis (5) haben kann, wenn ihre ersten sechs Glieder entweder

$a_1 = -\frac{5}{2},\ a_2 = -1,\ a_3 = \frac{1}{2},\ a_4 = 2,\ a_5 = 3,\ a_6 = \frac{9}{2}$ (12)

oder $a_1 = -\frac{5}{2},\ a_2 = -\frac{11}{12},\ a_3 = \frac{2}{3},\ a_4 = \frac{9}{4},\ a_5 = 3,\ a_6 = 4$ (13)

lauten.

II. Sowohl für (12) als auch für (13) bestätigt man (1), (2) wegen

$$-\frac{5}{2} - 1 + \frac{1}{2} + 2 + 3 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(-5 - 2 + 1 + 4 + 6 + 9) = \frac{13}{2},$$

$$-\frac{5}{2} - \frac{11}{12} + \frac{2}{3} + \frac{9}{4} + 3 + 4 = \frac{1}{12}(-30 - 11 + 8 + 27 + 36 + 48) =$$

$$= \frac{78}{12} = \frac{13}{2},$$

und (5), sowie wegen

$$-\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1,\ -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2;\ 2\cdot\frac{3}{2} = 3,\ 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2},$$

$$-\frac{5}{2} + \frac{19}{12} = -\frac{11}{12},\ -\frac{11}{12} + \frac{19}{12} = \frac{2}{3},\ \frac{2}{3} + \frac{19}{12} = \frac{9}{4};\ \frac{9}{4}\cdot\frac{4}{3} = 3,\ 3\cdot\frac{4}{3} = 4,$$

ebenfalls (3) und (4).

Mit I. und II. ist gezeigt, daß genau die in (12) und (13) genannten $a_1,\ldots,a_6$ den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Hinweis zur Korrektur: Bei anderen Eliminationsmöglichkeiten zur Herleitung von (9) (oder einer anderen Gleichung zur Ermittlung einer der Unbekannten) können Terme als Nenner auftreten. Dann ist jeweils zuvor zu diskutieren, ob ein solcher Term gleich 0 sein kann.

241232) Lösung: 7 Punkte

Wenn für die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ die Ungleichungen

$$\sqrt{3} \leqq a \leqq 2,\ \sqrt{3} \leqq b \leqq 2,\ \sqrt{3} \leqq c \leqq 2 \qquad (1)$$

gelten, so folgt:

a) Nach (1) und dem Kosinussatz gilt für $\alpha = \sphericalangle BAC$

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \geqq 3 + 3 - 4 > 0,$$

wegen $b > 0$, $c > 0$ also $\cos\alpha > 0$ und daher $\alpha < 90^\circ$.

Ebenso folgt $\beta < 90^\circ$, $\gamma < 90^\circ$ für $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle ACB$.

b) Ist D der Fußpunkt des von C auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes und ist $\overline{BD} = p$, $\overline{AD} = q$, so liegt D nach a) zwischen A und B, also gilt einerseits

$$p + q = c, \qquad (2)$$

andererseits gilt nach dem Satz des Pythagoras für $\overline{CD} = h_c$

$$p^2 = a^2 - h_c^2,\ q^2 = b^2 - h_c^2. \qquad (3)$$

Wäre $h_c < \sqrt{2}$, so ergäbe sich aus (3) und (1)

$$p^2 > 3 - 2,\ q^2 > 3 - 2,$$

wegen $p > 0$, $q > 0$ also $p > 1$, $q > 1$ und nach (2) folglich $c > 2$ im Widerspruch zu (1).

Daher gilt $h_c \leqq \sqrt{2}$.

Entsprechend folgt, daß die beiden anderen Höhenlängen $h_a \leqq \sqrt{2}$ und $h_b \leqq \sqrt{2}$ sind.

241233A) Lösung: 8 Punkte

I. Wenn eine Funktion f die Eigenschaften (1), (2) und (3) hat, so folgt:

Nach (3) für $x = y = 0$ gilt $f(0) = 2 \cdot f(0)$, also

$$f(0) = 0. \tag{4}$$

Für alle rationalen x folgt hiernach, indem man (3) mit $y = -x$ anwendet, $0 = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, also

$$f(-x) = -f(x). \tag{5}$$

Weiterhin folgt für jedes rationale x und jede natürliche Zahl $n \geqq 1$, indem man (3) der Reihe nach mit $y = (n-1)x$, $(n-2)x, \ldots, x$ anwendet,

$$\begin{aligned} f(nx) &= f(x) + x\cdot(n-1)x\cdot nx + f((n-1)x) \\ &= f(x) + (n-1)nx^3 + f(x) + x\cdot(n-2)x\cdot(n-1)x + f((n-2)x) \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= f(x) + (n-1)nx^3 + f(x) + (n-2)(n-1)x^3 + \ldots + f(x) + 1\cdot 2\cdot x^3 + f(x) \\ &= n \cdot f(x) + x^3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1), \end{aligned}$$

wegen $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{2}(n-1)n$, $\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ also

$$f(nx) = n\cdot f(x) + \tfrac{1}{3}(n-1)n(n+1)x^3 = n\cdot\left(f(x) + \tfrac{1}{3}(n^2-1)x^3\right). \tag{6}$$

Nach (4) gilt (6) auch für $n = 0$; wegen (5) und daher

$$f(-nx) = -f(nx) = -n \cdot \left(f(x) + \tfrac{1}{3}((-n)^2 + 1)x^3\right)$$

gilt (6) auch für alle negativen ganzen Zahlen n.

Für alle ganzzahligen $m \neq 0$ (oder auch nur $m > 0$) folgt aus (2) und (6), angewandt mit $n = m$, $x = \frac{1}{m}$,

$$1 = f\left(m\cdot\tfrac{1}{m}\right) = m\cdot\left(f\left(\tfrac{1}{m}\right) + \tfrac{1}{3}(m^2-1)\cdot\tfrac{1}{m^3}\right),$$

also $f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{3}(m^2-1)\cdot\frac{1}{m^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{m}\cdot\left(2 + \frac{1}{m^2}\right)$.

Damit folgt für alle ganzzahligen n und alle ganzzahligen $m \neq 0$ (oder $m > 0$.), indem man (6) mit $x = \frac{1}{m}$ anwendet,

$$f(\tfrac{n}{m}) = n \cdot (f(\tfrac{1}{m}) + \tfrac{1}{3}(n^2 - 1) \cdot \tfrac{1}{m^3})$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{n}{m} \cdot (2 + \tfrac{1}{m^2} + (n^2 - 1) \cdot \tfrac{1}{m^2})$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{n}{m} \cdot (2 + \tfrac{n^2}{m^2}).$$

Also kann nur die für alle rationalen x durch

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x \cdot (2 + x^2) = (= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}x^3) \qquad (7)$$

definierte Funktion f die Eigenschaften (1), (2), (3) haben.

II. Für diese Funktion bestätigt man (1), (2) sowie

$$f(x+y) = \tfrac{2}{3}(x+y) + \tfrac{1}{3}(x+y)^3$$
$$= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3$$
$$= f(x) + f(y) + xy(x+y),$$

d. h. (3).

Daher hat genau die in (7) genannte Funktion die geforderten Eigenschaften.

Bemerkung: Die Gleichung (6) kann auch (für kleine Werte von n durch Anwendung von (3) in wenigen Wiederholungsschritten errechnet, dann allgemein vermutet und) durch vollständige Induktion bewiesen werden, wobei sich die obige Verwendung der - als bekannt zu zitierenden - Formeln für $\sum i$ und $\sum i^2$ erübrigt.

241233B) Lösung: 8 Punkte

I. Für $x = -n + \frac{1}{2}$ gilt $-x = x+2n-1$,
$-(x+1) = x+2n-2$,
.....
$-(x+n-1) = x+n$.

Daraus folgt

$$(-1)^n \cdot x(x+1)\ldots(x+n-1) = (x+n)\ldots(x+2n-2)(x+2n-1).$$

Da n gerade ist, gilt $(-1)^n = 1$; somit erfüllt $x = -n + \frac{1}{2}$ die geforderte Gleichung.

II. Für jedes $x > -n + \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} -x &< x+2n-1, \\ -(x+1) &< x+2n-2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -(x+n-1) &< x+n \end{aligned} \qquad (1)$$

und trivialerweise

$$\begin{aligned} x &< x+2n-1, \\ x+1 &< x+2n-2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x+n-1 &< x+n. \end{aligned} \qquad (2)$$

Daraus folgen die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |x| &< x+2n-1, \\ |x+1| &< x+2n-2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |x+n-1| &< x+n, \end{aligned} \qquad (3)$$

da jedesmal eine linke Seite in (3) gleich der entsprechenden linken Seite in (1) oder in (2) ist.

Aus (3) ergibt sich wegen

$$x(x+1)\ldots(x+n-1) \leqq |x(x+1)\ldots(x+n-1)|$$

erst recht

$$x(x+1)\ldots(x+n-1) < (x+1)\ldots(x+2n-2)(x+2n-1);$$

somit erfüllt kein $x > -n + \frac{1}{2}$ die geforderte Gleichung.

III. Analog erhält man: Für jedes $x < -n + \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} -x &> x+2n-1, \\ -(x+1) &> x+2n-2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -(x+n-1) &> x+n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -x &> -(x+2n-1), \\ -(x+1) &> -(x+2n-2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -(x+n-1) &> -(x+n), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} -x &> |x+2n-1|, \\ -(x+1) &> |x+2n-2|, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -(x+n-1) &> |x+n|, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &x(x+1)\ldots(x+n-1) \\ &= (-1)^n \cdot x(x+1)\ldots(x+n-1) > |(x+n)\ldots(x+2n-2)(x+2n-1)| \\ &\geqq (x+n)\ldots(x+2n-2)(x+2n-1). \end{aligned}$$

Daher erfüllt auch kein $x < -n + \frac{1}{2}$ die geforderte Gleichung.

Mit I., II. und III. ist gezeigt: Die geforderte Gleichung hat die Zahl $x = -n + \frac{1}{2}$ und nur diese als Lösung.

Hinweis zur Korrektur: Auf das (richtige) Lösen der Gleichung für spezielle n sind höchstens 2 Punkte zu erteilen, sofern die Lösungsdarstellung keine effektiven Elemente einer weiterführenden Verallgemeinerung enthält.

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

241234) Lösung: 5 Punkte

Für jede reelle Zahl z mit $1 \leq z \leq 5$ gilt:

Ein Punkt mit den Koordinaten (x;y) ist genau dann Schnittpunkt der genannten Geraden und der Parabel, wenn er beide Gleichungen

$$y = \frac{1}{3}x + z, \tag{1}$$

$$y = 2x^2 \tag{2}$$

erfüllt. Das gilt genau dann, wenn x die Gleichung

$$x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}z = 0 \tag{3}$$

erfüllt und y gemäß (1) oder - was dann dasselbe besagt - gemäß (2) zu x gehört. Die Gleichung (3) hat genau die beiden Zahlen

$$x_{1;2} = \frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{1}{2}z} = \frac{1}{12}(1 \pm \sqrt{1 + 72z}) \tag{4}$$

als Lösung, da der Radikand wegen $z \geq 1$ positiv ist.

Durchläuft z alle Werte mit $1 \leq z \leq 5$, so durchläuft 1+72z alle Werte mit $73 \leq 1+72z \leq 361$, und daher durchlaufen x_1, x_2 alle Werte mit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{12}(1 + \sqrt{73}) \leq x_1 \leq \frac{1}{12}(1 + \sqrt{361}) \\ \text{bzw. } &\frac{1}{12}(1 - \sqrt{361}) \leq x_2 \leq \frac{1}{12}(1 - \sqrt{73}). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wegen $8^2 < 73 < 9^2$ und $361 = 19^2$ gilt ferner $8 < \sqrt{73} < 9$ und $\sqrt{361} = 19$, woraus man die Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} &0 < \frac{1}{12}(1 + \sqrt{73}) < 1 < \frac{1}{12}(1 + \sqrt{361}) < 2 \\ \text{und } &-2 < \frac{1}{12}(1 - \sqrt{361}) < -1 < \frac{1}{12}(1 - \sqrt{73}) < 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

erhält.

Nun erfüllt eine reelle Zahl z genau dann die Bedingung der Aufgabe, wenn mindestens eine der in (4) genannten Zahlen x_1, x_2 eine ganze Zahl ist. Nach der Aussage über (5) ist dies - wie man unter Berücksichtigung von (6) erkennt - genau für diejenigen Werte z der Fall, für die sich aus (4) entweder

$$x_1 = 1 \tag{7}$$

oder

$$x_2 = -1 \tag{8}$$

ergibt.

Aus (4) ergibt sich aber genau dann (7), wenn $\frac{1}{12}(1 + \sqrt{1+72z}) = 1$, d. h. $\sqrt{1+72z} = 11$ gilt, was genau für $1+72z = 121$, d. h. genau für

$$z = \frac{5}{3} \tag{9}$$

zutrifft.

Aus (4) ergibt sich genau dann (8), wenn $\frac{1}{12}(1 - \sqrt{1+72z}) = -1$, d. h. $\sqrt{1+72z} = 13$ gilt, was genau für $1+72z = 169$, d. h. genau für

$$z = \frac{7}{3} \tag{10}$$

zutrifft.

Da beide Werte (9), (10) auch $1 \leqq z \leqq 5$ erfüllen, haben genau diese beiden Werte von z die geforderte Eigenschaft.

Die zugehörigen Schnittpunkte mit ganzzahligen Abszissen haben nach den Feststellungen über (7), (8) sowie (9), (10) und (1) (oder (2)) die Koordinaten

(1;2) bzw. (-1;2).

Möglich ist auch ein <u>graphischer Lösungsweg</u>:

Die Geraden mit Gleichungen $y = \frac{1}{3}x + z$ $(1 \leqq z \leqq 5)$ erfüllen den Streifen zwischen $y = \frac{1}{3}x + 1$ und $y = \frac{1}{3}x + 5$ (Abb. L 241234). In diesem Streifen hat die Parabel als Punkte mit ganzzahliger Abszisse genau die Punkte P_1, P_{-1} mit den Koordinaten (1;2) bzw. (-1;2). Die durch P_1, P_{-1} gelegten Geraden mit dem Anstieg $\frac{1}{3}$ haben den y-Achsen-Abschnitt $z = \frac{5}{3}$ bzw. $z = \frac{7}{3}$, wie man z. B. nach Abbildung L 241234 aus $\frac{1}{3} = \overline{YZ_\nu} : \overline{YP_\nu}$ erhält (Y bzw. Z_ν mit den Koordinaten (0;2) bzw. $(0;2-\frac{\nu}{3})$ $(\nu = \pm 1)$).

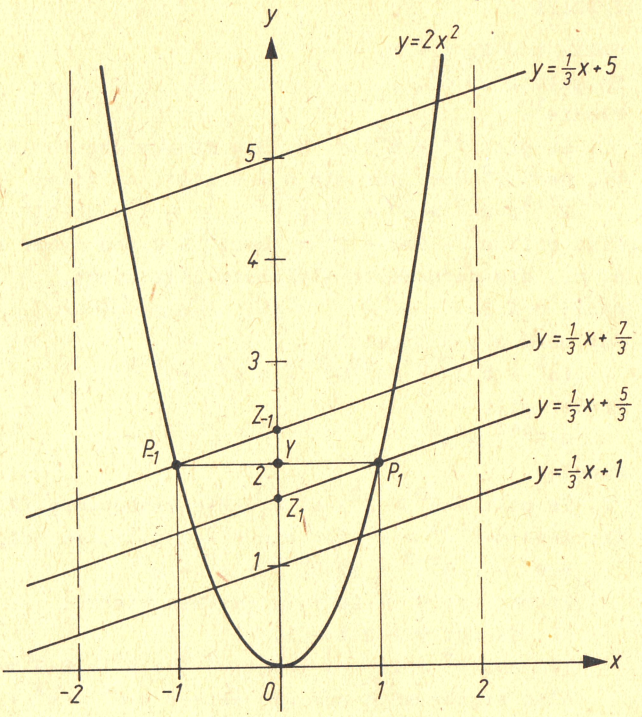

Abb. L 241234

241235) Lösung: 7 Punkte

1. Fall: b = 1.
   Die geforderte Gleichung lautet a+1 = ac, d. h. a(c-1) = 1. Das gilt im Bereich der natürlichen Zahlen a ≧ 1, c-1 ≧ 0 genau für a = c-1 = 1, d. h. a = 1, c = 2.
2. Fall: b = 2, c = 1.
   Für alle a ist $(a-1)^2 + 1 > 0$, also $a^2 + 2 > 2a$; d. h., die geforderte Gleichung gilt nicht.
3. Fall: b = 2, c = 2.
   Die geforderte Gleichung lautet $a^2 + 4 = 4a$, d. h. $a^2 - 4a + 4 = 0$; dies gilt genau für a = 2.
4. Fall: b = 2, c = 3.
   Die geforderte Gleichung lautet $a^2 + 8 = 6a$, d. h. $a^2 - 6a + 8 = 0$; dies gilt genau für a = 2 und a = 4.
5. Fall: b = 2, c = 4.
   Die geforderte Gleichung lautet $a^2 + 16 = 8a$, d. h. $a^2 - 8a + 16 = 0$; dies gilt genau für a = 4.

6. Fall: $b = 2$, $c \geq 5$.

Es gilt $2^c > c^2$.

Beweis[1]:

I. Es gilt $2^5 > 5^2$, d. h. die Behauptung für $c = 5$.

II. Wenn $2^c > c^2$ für ein $c \geq 5$ gilt, so folgt

$$2^{c+1} > 2c^2 > c^2 + 3c > c^2 + 2c + 1 = (c+1)^2.$$

Also gilt $a^2 - 2ac + 2^c > (a-c)^2 \geq 0$ und daher $a^2 + 2^c > 2ac$; d. h., die geforderte Gleichung gilt nicht.

7. Fall: $b \geq 3$. → vgl. Korrektur.

Für alle $a,c \geq 1$ gilt[2]

$$(a^b + b^c)^2 \geq 4a^{2b}b^{2c} \geq a^2b^2 \cdot 4 \cdot 9^{c-1}. \qquad (1)$$

Ferner gilt

$$4 \cdot 9^{c-1} > c^2. \qquad (2)$$

Beweis:

I. Es gilt $4 \cdot 9^0 > 1^2$; d. h., die Behauptung (2) gilt für $c = 1$.

II. Wenn $4 \cdot 9^{c-1} > c^2$ für ein $c \geq 1$ gilt, so folgt:

$$4 \cdot 9^c = 4 \cdot 9^{c-1} + 32 \cdot 9^{c-1} > c^2 + 9^c. \qquad (3)$$

Ferner ist $9^c > 2c + 1$. (Beweis hierzu:

I. Es ist $9 > 2 \cdot 1 + 1$.

II. Aus $9^c > 2c + 1$ folgt $9^{c+1} = 9^c + 8 \cdot 9^c > 2c + 3$.)

Also ergibt sich aus (3) weiter $4 \cdot 9^c > c^2 + 2c + 1 = (c+1)^2$.

Damit ist (2) bewiesen, und aus (1) ergibt sich $(a^b + b^c)^2 > a^2b^2c^2$, also $a^b + b^c > abc$; d. h., die geforderte Gleichung gilt nicht.

Da in den Fällen 1 bis 7 alle Tripel positiver natürlicher Zahlen erfaßt sind, ist bewiesen: Die gesuchten Tripel sind genau

$$(a,b,c) = (1,1,2),\ (2,2,2),\ (2,2,3),\ (4,2,3),\ (4,2,4).$$

---

1 Die Aussage $2^c > c^2$ für alle natürlichen $c \geq 5$ kann auch als bekannt zitiert werden.

2 Die hier verwendete Ungleichung $(x+y)^2 \geq 4xy$ kann entweder als bekannt zitiert oder aus $(x-y)^2 \geq 0$ bewiesen werden. Der Ansatz mit dieser Ungleichung läßt sich auch durch weitere Unterscheidung von Unterfällen des Falles $b > 3$ vermeiden.

241236) Lösung: 8 Punkte

Die Gleichung (1) ist genau dann erfüllt, wenn

$$F(n) = \left(\frac{99}{100}\right)^n + \left(\frac{101}{100}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n > \frac{51}{25} = 2{,}04$$

ist. (2)

Nun gilt nach dem binomischen Satz

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right)^n = 1 - \binom{n}{1}\cdot 0{,}01 + \binom{n}{2}\cdot 0{,}01^2 - \binom{n}{3}\cdot 0{,}01^3 + \binom{n}{4}\cdot 0{,}01^4 + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}\cdot 0{,}01^n,$$

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\cdot 0{,}01 + \binom{n}{2}\cdot 0{,}01^2 + \binom{n}{3}\cdot 0{,}01^3 + \binom{n}{4}\cdot 0{,}01^4 + \ldots + \binom{n}{n}\cdot 0{,}01^n;$$

Also gilt für $n = 0,1,2,3,\ldots$

$$F(n) = 2\left\{1 + \binom{n}{2}\cdot 0{,}01^2 + \binom{n}{4}\cdot 0{,}01^4 + \ldots + (1+(-1)^n)\cdot\binom{n}{n}\cdot 0{,}01^n\right\}, \quad (3)$$

$$F(n) > 2\left\{1 + \binom{n}{2}\cdot 0{,}01^2\right\}.$$

Daher ist $F(n) > 2{,}04$, wenn $\frac{n(n-1)}{2}\cdot 0{,}01^2 > 0{,}02$, also $n(n-1) > 400$ ist. Das trifft für $n \geq 21$ zu.

Für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 21$ ist also die Ungleichung (1) erfüllt.

Für $n = 20$ gilt wegen (3)

$$F(20) = 2 + 20\cdot 19\cdot 0{,}01^2\left\{1 + \frac{18\cdot 17}{3\cdot 4}\cdot 0{,}01^2\cdot s\right\}, \text{ wobei}$$

$$s = 1 + \frac{16\cdot 15}{5\cdot 6}\cdot 0{,}01^2 + \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot 0{,}01^4 + \ldots + \frac{16\cdot 15\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 6\cdot\ldots\cdot 19\cdot 20}\cdot 0{,}01^{16}$$

$$s < 1 + 4^2\cdot 0{,}01^2 + 4^4\cdot 0{,}01^4 + \ldots + 4^{16}\cdot 0{,}01^{16},$$

$$s < 1 + 0{,}0016 + 0{,}0016^2 + \ldots + 0{,}0016^8 < \frac{1}{1-0{,}0016} < \frac{100}{99} \text{ ist.}$$

Daraus folgt

$$F(20) < 2 + 0{,}038\left\{1 + 0{,}00255\cdot\frac{100}{99}\right\} < 2{,}038 + \frac{0{,}04\cdot 0{,}3}{99}$$

$$< 2{,}038 + 0{,}0002 < 2{,}04.$$

Für $n = 20$ ist also die Ungleichung (1) nicht erfüllt.

Wegen (3) gilt ferner für $n = 0,1,2,3,\ldots, 19$

$F(n) < F(20) < 2{,}04$

Daher ist für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 21$ und nur für diese die Ungleichung (1) erfüllt.