XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olampiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

200831) Lösung: 6 Punkte

Treffen Uwes Aussagen für eine Angabe von Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder zu und ist dabei m die Anzahl der teilnehmenden Männer, so ergibt sich:

Die Anzahl der teilnehmenden Frauen ist m+3, die Anzahl der Erwachsenen also 2m+3; es gilt

$$2m+3 \geqq 20, \qquad (1)$$

und die Anzahl der Kinder ist 2m+3-20.

Somit ist m + m+3 + 2m+3-20 = 4m - 14 die Gesamtzahl aller Teilnehmer. Daher gilt einerseits

$$4m - 14 \leqq 80, \qquad (2)$$

andererseits ist 4m - 14 durch 7 teilbar. Das gilt folglich auch für 4m; somit ist wegen der Teilerfremdheit von 4 und 7

m durch 7 teilbar. (3)

Wäre $m \leqq 7$, so wäre $2m+3 \leqq 17$, im Widerspruch zu (1); wäre $m \geqq 28$, so wäre $4m-14 \geqq 98$, im Widerspruch zu (2). Daher können (1), (2), (3) nur erfüllt sein, wenn m = 14 oder m = 21 ist. Somit können nur die in der folgenden Tabelle angegebenen Personenzahlen mit Uwes Angaben übereinstimmen. Aus der Tabelle ist zugleich ersichtlich, daß sie tatsächlich mit diesen Angaben übereinstimmen:

Anzahl der				
Männer	Frauen	Erwachsenen	Kinder	Teilnehmer
m	m+3	2m+3	2m-17	4m-14
14	17	31	11	42
21	24	45	25	70

200832) Lösung: 7 Punkte

Wenn eine dreistellige natürliche Zahl n die geforderte Eigenschaft hat, so gilt für ihre drei Ziffern, in irgendeiner Reihenfolge mit a, b, c bezeichnet,

$$abc = 5(a + b + c). \qquad (1)$$

Wäre eine der Ziffern a, b, c gleich 0, so folgte $abc = 0$, nach (1) also $a+b+c = 0$, und hieraus wegen $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$ weiter $a = b = c = 0$, im Widerspruch dazu, daß n dreistellig ist. Also gilt

$$1 \leqq a \leqq 9,\ 1 \leqq b \leqq 9,\ 1 \leqq c \leqq 9. \qquad (2)$$

Nach (1) ist die Primzahl 5 ein Teiler von abc, also von (mindestens) einer der Ziffern a, b, c. Wegen (2) ist diese Ziffer gleich 5; wegen der beliebigen Wahl der Reihenfolge kann etwa $c = 5$ angenommen werden.

Hiernach folgt aus (1)

$$ab = a + b + 5. \qquad (3)$$

Erste Fortsetzungsmöglichkeit: Aus (3) folgt

$$ab - a - b = 5,$$
$$ab - a - b + 1 = 6,$$
$$(a-1)(b-1) = 6. \qquad (4)$$

Nach (2) sind auch $a-1$ und $b-1$ natürliche Zahlen; wegen der beliebigen Wahl der Reihenfolge kann etwa $a \leqq b$ angenommen werden, wonach es für (4) nur die beiden Möglichkeiten gibt, daß

entweder $a-1 = 1$, $b-1 = 6$, also $a = 2$, $b = 7$ (5)

oder $a-1 = 2$, $b-1 = 3$, also $a = 3$, $b = 4$ (6)

gilt. Berücksichtigt man nun noch alle Möglichkeiten der Reihenfolge von a, b, c, so ergibt sich, daß nur die Zahlen

257, 275, 527, 572, 725, 752,
345, 354, 435, 453, 534, 543

die geforderten Eigenschaften haben können.

Sie haben diese, wie die Probe $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 = 5(2+5+7)$ bzw. $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 = 5(3+4+5)$ zeigt.

Zweite Fortsetzungsmöglichkeit zur Gewinnung von (5), (6) aus (3): Für die von 0 verschiedenen Ziffern $b = 1, 2, \ldots, 9$ lautet die Gleichung (3) wie in der folgenden Tabelle angegeben und hat im Bereich der natürlichen Zahlen die jeweils anschließend ermittelte Lösungsmenge:

b	ab=a+b+5	äquivalent umgeformt zu	Lösungsmenge im Bereich der natürlichen Zahlen	Folgerung
1	a=a+6	0 = 6	-	-
2	2a=a+7	a = 7	a = 7	(5) mit vertauschten a, b
3	3a=a+8	2a = 8	a = 4	(6) mit vertauschten a, b
4	4a=a+9	3a = 9	a = 3	(6)
5	5a=a+10	4a = 10	-	-
6	6a=a+11	5a = 11	-	-
7	7a=a+12	6a = 12	a = 2	(5)
8	8a=a+13	7a = 13	-	-
9	9a=a+14	8a = 14	-	-

Anschluß an (6) wie in der ersten Fortsetzungsmöglichkeit.

Bei anderen Möglichkeiten, (3) durch systematisches Probieren zu lösen, ist es z. B. nützlich, aus ab = a+b+5 $\leqq$ 23 zu schließen, daß alle Fälle mit a = 3, b $\geqq$ 8, mit a = 4, b $\geqq$ 6 sowie mit a $\geqq$ 5, b $\geqq$ 5 nicht betrachtet zu werden brauchen.

200833) Lösung: 7 Punkte

(I) Angenommen, ein Dreieck ABC erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Sein Umkreis sei mit k, sein Mittelpunkt mit M bezeichnet. Dann ist das Dreieck ACM[1] nach dem Kongruenzsatz sss eindeutig bestimmt. Der Punkt B liegt einerseits auf k und andererseits auf dem Kreis um A mit dem Radius c.

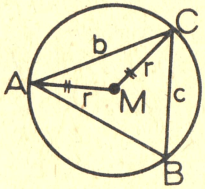

Abb. L 833a

(II) Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1 Geht man analog von dem Teildreieck ABM aus, dann liefert die entsprechende Konstruktion zwei nicht kongruente Dreiecke ABC_1 und ABC_2.

(1) Man konstruiere ein Dreieck ACM[1] aus $\overline{AC} = b$, $\overline{AM} = \overline{CM} = r$.

(2) Um A zeichne man den Kreis k' mit dem Radius c. Man wähle einen der Schnittpunkte von k mit k' und bezeichne ihn mit B.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach Konstruktion haben b, c und r die geforderten Längen, und k ist der Umkreis des Dreiecks ABC.

(IV) Der Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $b < c < 2r$ entstehen beim Konstruktionsschritt (2) genau zwei Schnittpunkte, die sich so mit B_1 bzw. B_2 bezeichnen lassen, daß M im Innern des Dreiecks AB_1C, aber außerhalb des Dreiecks AB_2C liegt. Daher ist das Dreieck AB_1C spitzwinklig, das Dreieck AB_2C aber stumpfwinklig; somit sind diese beiden Dreiecke nicht zueinander kongruent.

Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck ABC daher nicht eindeutig bestimmt.

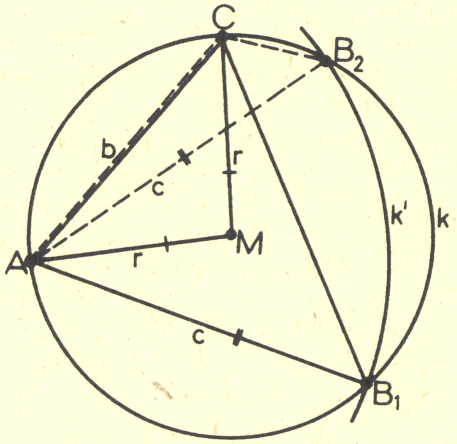

Abb. L 833b

1 Geht man analog von dem Teildreieck ABM aus, dann liefert die entsprechende Konstruktion zwei nicht kongruente Dreiecke ABC_1 und ABC_2.

200834) Lösung: 6 Punkte

Bube, Dame, König, As seien mit B, D, K bzw. A bezeichnet, die Kreuz-, Pik-, Herz-, Karokarte mit Kr, Pk, Hz bzw. Ka.

Wenn eine Reihenfolge von Karten den Angaben entspricht, so folgt: Zwischen K und A liegt wegen (2) mindestens eine Karte; denn sonst könnte der Abstand zwischen B und A nicht kleiner sein als der zwischen A und K. Aus (1) folgt daher: Zwischen D und A liegen (mindestens zwei, also genau) die beiden anderen Karten, d. h., die Reihenfolge ist eine der vier in (6), (7) genannten:

D B K A, D K B A, (6)

A B K D, A K B D. (7)

Die in (6) genannten weisen links von D keine Karte auf, widersprechen also (5) und scheiden daher aus. Von den in (7) genannten Reihenfolgen entspricht nur

A B K D (8)

der Bedingung (2).

Weiter folgt: Zwischen Ka und Hz liegt wegen (4) mindestens eine Karte, zwischen Kr und Hz wegen (3) daher die beiden anderen Karten, d. h., die Reihenfolge ist eine der vier in (9), (10) genannten:

Kr Pk Ka Hz, Hz Pk Ka Kr, (9)

Kr Ka Pk Hz, Hz Ka Pk Kr. (10)

Davon entsprechen nur die in (10) genannten Reihenfolgen der auf (8) angewandten Bedingung (5). Von den Reihenfolgen (10) entspricht nur

Kr Ka Pk Hz

der Bedingung (4).

Damit ist bewiesen, daß aus den Angaben eindeutig hervorgeht: Auf dem Tisch liegen die Karten

Kreuz-As, Karo-Bube, Pik-König, Herz-Dame

von links nach rechts in dieser Reihenfolge.

200835) Lösung: 7 Punkte

Der Flächeninhalt des Dreiecks SBD beträgt $\frac{\overline{SB} \cdot \overline{SD}}{2} = \frac{5\ \text{cm} \cdot \overline{SD}}{2}$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks SAC beträgt $\frac{\overline{SA} \cdot \overline{SC}}{2}$.

Nach Voraussetzung sind das 36 % des Flächeninhalts des Dreiecks SBD. Daher gilt

$$\overline{SA} \cdot \overline{SC} = \frac{36}{100} \cdot 5\ \text{cm} \cdot \overline{SD}. \qquad (1)$$

Nun gilt nach einem Teil des Strahlensatzes $\overline{SC}:\overline{SD} = SA:5\ \text{cm}$, also

$$\overline{SC} = \frac{\overline{SA} \cdot \overline{SD}}{5\ \text{cm}}. \qquad (2)$$

Setzt man $\overline{SC}$ aus (2) in (1) ein, so erhält man

$$\frac{\overline{SA}^2 \cdot \overline{SD}}{5\ \text{cm}} = \frac{36}{100} \cdot 5\ \text{cm} \cdot \overline{SD}$$

und daraus

$$\overline{SA}^2 = \frac{36 \cdot 25}{100}\ \text{cm}^2 = 9\ \text{cm}^2 \text{ und mithin}$$
$$\overline{SA} = 3\ \text{cm}.$$

2. Lösungsweg:

Die Dreiecke SAC und SBD sind ähnlich (gleiche Winkel bei S, gleichgroße Stufenwinkel bei A,B), ihre Flächeninhalte haben das Verhältnis 36:100. Da sich die Flächeninhalte in diesem Falle wie die Quadrate der Längen gleichliegender Seiten verhalten, ist also $\overline{SA}:\overline{SB} = 6:10$ und daher

$$\overline{SA} = \frac{3}{5}\,\overline{SB} = 3\ \text{cm}.$$

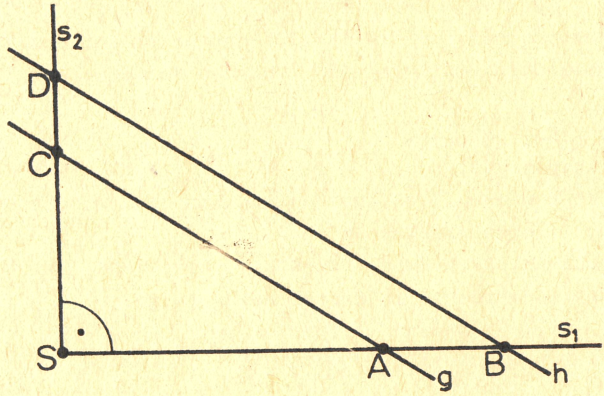

Abb. L 835

200836) Lösung: 7 Punkte

Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC_1 sei M_1, der des Dreiecks ABC_2 sei M_2. Die Winkel $\sphericalangle C_1AB$ und $\sphericalangle C_2AB$ sind jeweils Peripheriewinkel in den Umkreisen. Wegen (1) sind sie gleichgroß; die zugehörigen Zentriwinkel $\sphericalangle C_1M_1B$ und $\sphericalangle C_2M_2B$ sind daher nach dem Satz über Zentri- und Peripheriewinkel ebenfalls gleichgroß. Da die Dreiecke C_1M_1B und C_2M_2B beide gleichschenklig sind, in der Größe des Winkels an der Spitze und damit auch in der Größe ihrer Basiswinkel übereinstimmen, sind sie wegen (2) nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent. Folglich gilt $\overline{M_1B} = \overline{M_2B}$, d. h. die Radien der beiden Umkreise sind einander gleich, w. z. b. w.

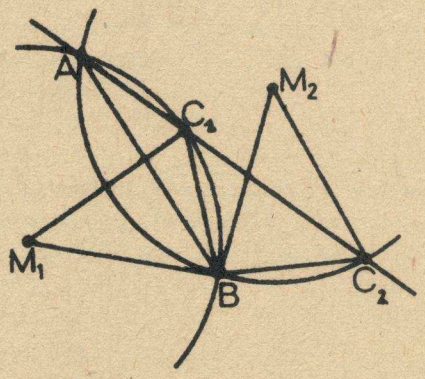

Abb. L 836