A 11/12;I VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Es seien x_k und y_k ganzrationale Zahlen, die die Bedingungen $0 \leqq x_k \leqq 2$ und $0 \leqq y_k \leqq 2$ erfüllen.
   a) Ermitteln Sie die Anzahl aller (nicht entarteten) Dreiecke mit Eckpunkten $P_k\ (x_k;\ y_k)$, wobei x_k, y_k die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten von P_k bedeuten!
   (Dabei gelten zwei Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ genau dann als gleich, wenn jede Ecke von $\triangle_1$ auch Ecke von $\triangle_2$ ist.)
   b) Geben Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke an!

2. Beweisen Sie den folgenden Satz:
   Gegeben seien gewisse Gegenstände, von denen jeder eine bestimmte Farbe und eine bestimmte Form hat. Wenn es unter diesen Gegenständen zwei von verschiedener Farbe und zwei von verschiedener Form gibt, dann befinden sich unter diesen Gegenständen mindestens zwei solche, die sich sowohl in der Farbe als auch in der Form unterscheiden.

3. Beweisen Sie, daß für alle nicht negativen Zahlen a, b, c
   $$a^3 + b^3 + c^3 \geqq a^2 \cdot \sqrt{bc} + b^2 \cdot \sqrt{ac} + c^2 \cdot \sqrt{ab}$$
   gilt!

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

4. Beweisen Sie, daß das Produkt von vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein kann!

5. Es sind alle geordneten Paare reeller Zahlen (x, y) anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x\,(ax^2 + by^2 - a) = 0 \qquad (1)$$
$$y\,(ax^2 + by^2 - b) = 0 \qquad (2)$$

erfüllt ist. Dabei sind a und b reelle Zahlen mit

$a \neq 0$, $b \neq 0$ und $a \neq b$.

6. Gegeben sei eine regelmäßige sechsseitige Pyramide. Man lege einen ebenen Schnitt durch die Pyramide, der durch die Mittelpunkte zweier nicht benachbarter und nicht paralleler Seiten der Grundfläche und durch den Mittelpunkt der Höhe der Pyramide verläuft. Es ist das Verhältnis des Flächeninhalts der dabei entstehenden Schnittfigur und des Flächeninhalts einer Seitenfläche der Pyramide zu ermitteln.

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. a) Es gibt genau 9 Punkte P_k, deren Koordinaten die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, nämlich — 6 Punkte

P_1 (0; 0), P_2 (1; 0), P_3 (2; 0)
P_4 (0; 1), P_5 (1; 1), P_6 (2; 1)
P_7 (0; 2), P_8 (1; 2), P_9 (2; 2).

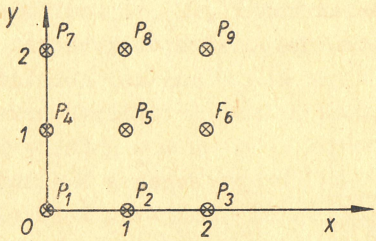

Abb. L 11/12; 1a

Die Anzahl aller Dreierkombinationen dieser 9 Punkte ist $z = \binom{9}{3} = 84$ (Siehe LB Kl. 11 B, S.).

Unter diesen z Kombinationen gibt es genau 8 solche, bei denen alle drei Punkte auf derselben Geraden liegen, nämlich

(P_1, P_2, P_3), (P_4, P_5, P_6), (P_7, P_8, P_9),
(P_1, P_4, P_7), (P_2, P_5, P_8), (P_3, P_6, P_9),
(P_1, P_5, P_9), (P_3, P_5, P_7).

Alle anderen Geraden, die je zwei der P_k enthalten, enthalten keinen weiteren der Punkte P_k.

Daher gibt es genau

$$84 - 8 = 76$$

verschiedene nicht entartete Dreiecke mit Eckpunkten P_k, deren Koordinaten der Aufgabenstellung genügen.

b_1) Wegen $A = \frac{1}{2}\left| x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$
(A: Flächeninhalt eines Dreiecks)
können bei den ganzrationalen x_k und y_k der Aufgabe als Maßzahlen für die Flächeninhalte nur die rationalen Zahlen $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; 2 auftreten; denn man kann zeigen, daß kein Dreieck im Innern eines Quadrates einen Flächeninhalt besitzen kann, der größer als $\frac{a^2}{2}$ ist. (a sei die Länge der Quadratseite.)
Hierbei genügt es, sich auf solche Dreiecke zu beschränken, deren Ecken sämtlich auf dem Rand des Quadrates liegen. Sollten zwei Ecken auf derselben Quadratseite liegen, so ist die Behauptung sofort klar. Seien nun P_r, P_s, P_t auf drei verschiedenen Seiten des Quadrates gelegen.

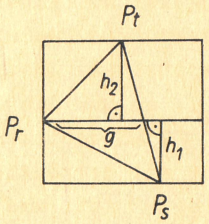

Abb. L 11/12; 1b

Aus der Abbildung L 11/12;1b erkennt man $A = \frac{1}{2}\, g\, (h_1 + h_2)$.
Wegen $g \leqq a$ und $h_1 + h_2 \leqq a$ folgt dann $A \leqq \frac{1}{2} a^2$, wie behauptet.
Tatsächlich treten auch alle vier Flächeninhalte auf:

1) $\triangle P_1P_4P_5$ mit $A_1 = \frac{1}{2}$ FE
2) $\triangle P_1P_2P_7$ mit $A_2 = 1$ FE
3) $\triangle P_1P_6P_8$ mit $A_3 = \frac{3}{2}$ FE
4) $\triangle P_1P_3P_9$ mit $A_4 = 2$ FE.

Also sind $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; 2 genau alle Maßzahlen der Flächeninhalte der Dreiecke der Aufgabe.
Falls Schüler die Flächeninhaltsformel aus der analytischen Geometrie nicht kennen, soll für den Aufgabenteil b) noch ein zweiter Lösungsweg angegeben werden.

b_2) Als Maßzahlen für die Längen von Dreiecksseiten treten folgende Zahlen auf:
$1\ ;\ 2\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \sqrt{5}\ ;\ \sqrt{8}$.

(Außer den achsenparallelen Strecken, die nur die Längen 1 LE und 2 LE haben, erhält man nur die Diagonalen in den Quadraten mit der Seitenlänge 1 LE und 2 LE, bzw. in den Rechtecken mit den Seitenlängen 1 LE, 2 LE.) Für Dreiecke, die eine achsenparallele Seite besitzen, kommt als Höhe auf dieser Seite nur eine Strecke (parallel zur anderen Achse) mit der Länge 1 LE oder 2 LE in Frage. Daher haben alle diese Dreiecke einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2}$ FE, 1 FE oder 2 FE. Falls ein Dreieck eine Quadratdiagonale (Maßzahl der Länge: $\sqrt{8}$) als Seite besitzt, so muß mindestens eine Dreiecksseite achsenparallel sein. Daher ist auch dieser Flächeninhalt einer der drei angegebenen Werte. Ein Dreieck, das zwei Seiten mit der Seitenlänge $\sqrt{2}$ LE besitzt, muß als dritte Seite ebenfalls eine achsenparallele Seite enthalten (Verbindung der auf einer achsenparallelen Geraden liegenden Eckpunkte zweier benachbarter "Einheitsquadrate".). Besitzt ein Dreieck zwei Seiten mit der Seitenlänge $\sqrt{5}$ LE, so muß die dritte Seite zwangsläufig die Länge $\sqrt{2}$ LE besitzen, weil bei einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $\sqrt{5}$ LE die Fläche $A = \frac{5}{4}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{75}{16}} > 2$ ist, was für ein Dreieck der Aufgabenstellung nicht möglich ist (siehe 1. Lösungsweg). Also kann außer den drei angegebenen Zahlen als Maßzahl für einen Flächeninhalt der Dreiecke der Aufgabenstellung nur noch die Maßzahl des Flächeninhalts eines Dreiecks mit den Seitenlängen $\sqrt{5}$ LE; $\sqrt{5}$ LE und $\sqrt{2}$ LE auftreten.

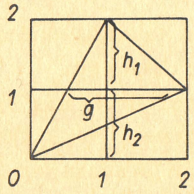

Abb. L 11/12; 1c

In diesem Fall gilt:

$g = \frac{3}{2}$ LE (Strahlensatz)

$h_1 = h_2 = 1$ LE

also:

$A = \frac{1}{2}\, g\, (h_1 + h_2)$

$= \frac{3}{2}$ FE.

Tatsächlich treten auch alle vier möglichen Flächeninhalte auf (siehe Lösung 1). Für die Dreiecke der Aufgabenstellung sind also $\frac{1}{2}$; 1 ; $\frac{3}{2}$; 2 alle Maßzahlen, die für die Flächeninhalte vorkommen.

2. Wir bilden die Menge $\mathfrak{M}$ aller gegebenen Gegenstände von derselben Farbe. Wenn es in ihr zwei solche gibt, die sich in der Form unterscheiden, dann unterscheidet sich jeder Gegenstand anderer Farbe von wenigstens einem der Gegenstände aus $\mathfrak{M}$ sowohl in der Farbe als auch in der Form. 5 Punkte

Wenn aber alle Gegenstände aus $\mathfrak{M}$ auch in der Form übereinstimmen, dann unterscheidet sich wenigstens ein Gegenstand anderer Form von ihnen sowohl in der Farbe als auch in der Form, da andernfalls im Widerspruch zur Voraussetzung alle Gegenstände dieselbe Form hätten.

3. Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt: 7 Punkte

$(a - b)^2 \geqq 0$, $(b - c)^2 \geqq 0$, $(a - c)^2 \geqq 0$.

Hieraus folgt:

$a^2-2ab+b^2 \geqq 0$, $b^2-2bc+c^2 \geqq 0$, $a^2-2ac+c^2 \geqq 0$,

bzw.

$a^2 - ab + b^2 \geqq ab$, (1)

$b^2 - bc + c^2 \geqq bc$, (2)

$a^2 - ac + c^2 \geqq ac$. (3)

Multipliziert man in (1) mit a + b, in (2) mit b + c, in (3) mit a + c, so erhält man, da mit $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$ jeder dieser Faktoren nicht negativ ist:

$a^3 + b^3 \geqq ab\,(a + b)$,

$b^3 + c^3 \geqq bc\,(b + c)$,

$a^3 + c^3 \geqq ac\,(a + c)$.

Hieraus ergibt sich nach Addition:

$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqq ab\,(a+b) + bc\,(b+c) + ac\,(a+c)$,

bzw.

$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqq a^2\,(b+c) + b^2\,(a+c) + c^2\,(a+b)$,

bzw.

$a^3 + b^3 + c^3 \geqq a^2\,\frac{b+c}{2} + b^2\,\frac{a+c}{2} + c^2\,\frac{a+b}{2}$ (4).

Da für nicht negative reelle Zahlen u, v stets $\frac{u+v}{2} \geqq \sqrt{uv}$ gilt, ergibt sich aus (4) die Ungleichung

$a^3 + b^3 + c^3 \geqq a^2 \cdot \sqrt{bc} + b^2 \cdot \sqrt{ac} + c^2 \cdot \sqrt{ab}$.

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

4. Jedes in der Aufgabe genannte Produkt hat die Form 6 Punkte

$n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$

$= (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$ (wobei n eine positive ganze Zahl ist.)

Da

$(n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 < (n^2 + 3n + 1)^2$

gilt, liegt

$n(n+1)(n+2)(n+3)$ zwischen den Quadraten von zwei aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen, nämlich

$(n^2 + 3n)$ und $(n^2 + 3n + 1)$,

und kann daher selbst nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein.

5. 1) Ist $x = y = 0$, so sind die Gleichungen (1) und (2) erfüllt. 7 Punkte

2) Ist $x = 0$ und $y \neq 0$, so sind die Gleichungen (1) und (2) genau dann erfüllt, wenn

$$by^2 = b,$$

also $y = 1$ oder $y = -1$ ist.

3) Ist $y = 0$ und $x \neq 0$, so sind die Gleichungen (1) und (2) genau dann erfüllt, wenn

$$ax^2 = a,$$

also $x = 1$ oder $x = -1$ ist.

4) Wäre $x \neq 0$ und $y \neq 0$, so müßte wegen (1) und (2)

$$ax^2 + by^2 - a = 0$$

und

$$ax^2 + by^2 - b = 0,$$

also $a = b$ gelten,

was der Voraussetzung widerspricht.

Das gegebene Gleichungssystem ist daher nur für die folgenden geordneten Paare reeller Zahlen erfüllt: (0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0).

6. Die Grundfläche der Pyramide sei das regelmäßige Sechseck ABCDEF mit dem Mittelpunkt O; die Spitze der Pyramide sei S. Der Mittelpunkt von AB sei P, der von DE sei Q, der Mittelpunkt der Höhe SO sei R. Man ziehe in der Ebene ε_{SPQ} durch R eine Gerade, die parallel zur Höhe SP der Seitenfläche ABS der Pyramide verläuft. Diese Gerade schneide PQ in G und SQ in H. Durch die Punkte G, R und H ziehe man Geraden, die sämtlich parallel zu AB verlaufen. Diese drei Geraden liegen jeweils in einer Ebene mit den Punkten G, A, B, C, F bzw. mit R, C, F, S bzw. mit H, D, E, S. Sie schneiden also die Kanten AF und BC bzw. die Kanten SF und SC bzw. die Kanten SE und SD der Pyramide; die Schnittpunkte seien K und L, M und N, V und U. Das Sechseck KLNUVM ist die gesuchte Schnittfigur. 9 Punkte

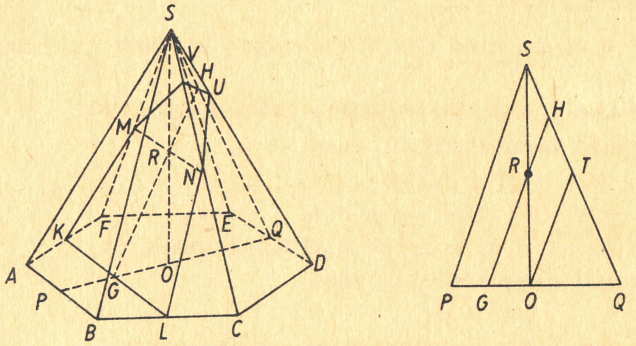

Abb. L 11/12; 4

Dieses Sechseck besteht aus den beiden Trapezen KMNL und MNUV mit den Höhen GR und RH. In der Ebene ε_{SPQ} ziehe man parallel zu GH eine Gerade durch O, die SQ im Punkte T schneide.

Es sei $\overline{SP} = h$.

Dann ist: $\overline{OT} = \frac{1}{2} h$ (als Mittelparallele im Dreieck $\triangle$ PSQ),

$\overline{RG} = \frac{1}{2}\,h$ (als Mittelparallele im Dreieck $\triangle$ PSO),

$\overline{ST} = \overline{TQ} = \frac{1}{2}\,h$,

$\overline{RH} = \frac{1}{2}\,\overline{OT} = \frac{1}{4}\,h$ (als Mittelparallele im Dreieck $\triangle$ OST)

$\overline{SH} = \overline{HT} = \frac{1}{4}\,h$.

Ferner gilt:

$\overline{FC} = 2a$

$\overline{KL} = \frac{1}{2}\,(\overline{AB} + \overline{FC}) = \frac{3}{2}\,a$ (als Mittelparallele im Trapez ABCF),

wenn a die Seitenlänge des regelmäßigen Sechsecks ist.

Da die Dreiecke $\triangle$ MSN und $\triangle$ FSC ähnlich sind ($MN \parallel FC$), gilt:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{SO}}\,.$$

Hieraus folgt: $\overline{MN} = a$

Da die Dreiecke $\triangle$ VSU und $\triangle$ ESD ähnlich sind ($VU \parallel ED$), gilt:

$$\frac{\overline{UV}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{SH}}{\overline{SQ}}\,.$$

Hieraus folgt: $\overline{UV} = \frac{1}{4}\,a$.

Der Flächeninhalt I der Schnittfigur ergibt sich dann wie folgt:

$$I = \frac{1}{2}\,(\overline{KL} + \overline{MN})\,.\,\overline{GR} + \frac{1}{2}\,(\overline{MN} + \overline{UV})\,.\,\overline{RH}\,,$$

bzw. $I = \frac{1}{2}\,.\,\frac{h}{2}\,(\frac{3}{2}\,a + a) + \frac{1}{2}\,.\,\frac{h}{4}\,(a + \frac{a}{4})$,

bzw. $I = \frac{25}{32}\,ah$,

d.h. $I = \frac{25}{16}\,J$, wenn J der Flächeninhalt einer Seitenfläche der Pyramide ist.

Es ist also $I : J = 25 : 16$.