L 11/12; I

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

1.

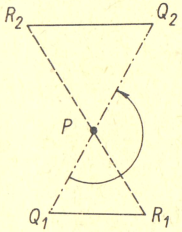

Abb. L 11/12; 1a

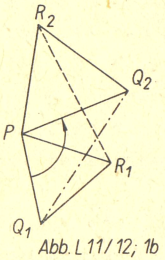

Abb. L 11/12; 1b

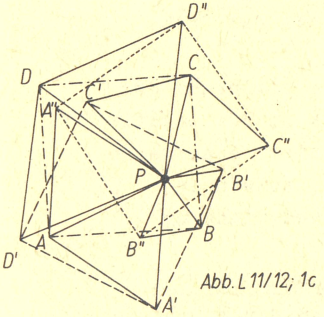

Abb. L 11/12; 1c

(I) Wir betrachten zunächst diejenige Teilmenge der gesuchten Menge, für die das Dreieck $\triangle$ PQR positiv orientiert ist. Es seien Q_1, Q_2 zwei beliebige Punkte auf dem Umfang des Quadrates, o.B.d.A. so bezeichnet, daß der (nicht überstumpfe) Winkel $\sphericalangle Q_1PQ_2$ entweder ein gestreckter Winkel oder aber positiv orientiert ist. 7 Punkte

Dann folgt

(1) $\overline{Q_1Q_2} = \overline{R_1R_2}$,

im ersten Fall (Abb. L 11/12;1a) wegen

$$\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_1P} + \overline{PQ_2} = \overline{R_1P} + \overline{PR_2} = \overline{R_1R_2},$$

im zweiten Fall (Abb. L 11/12;1b), da

$$\overline{PQ_1} = \overline{PR_1} ,$$

$$\overline{PQ_2} = \overline{PR_2} ,$$

$$\begin{aligned} \mu(\sphericalangle\, Q_1PQ_2) &= \mu(\sphericalangle\, Q_1PR_2) - \mu(\sphericalangle\, Q_2PR_2) \\ &= \mu(\sphericalangle\, Q_1PR_2) - \mu(\sphericalangle\, Q_1PR_1) \\ &= \mu(\sphericalangle\, R_1PR_2), \end{aligned}$$

also $\triangle\, Q_1PQ_2 \cong \triangle\, R_1PR_2$

ist.

Aus (1) folgt: Durchläuft Q das Quadrat ABCD, so durchläuft R ein kongruentes Quadrat A'B'C'D', und zwar punktweise entsprechend, d.h.: Bei derjenigen Bewegung der Ebene $\mathcal{E}$, bei der A, B. C, D in A', B', C', D' übergehen, geht jedesmal Q in den (vermöge der Forderung, $\triangle$ PQR solle gleichseitig und positiv orientiert sein) zugeordneten Punkt R über.

Genauer gesagt ist diese Bewegung, wie aus der Abb. L 11/12; 1c hervorgeht, eine Drehung der Ebene $\mathcal{E}$ im positiven Sinne um 60° mit dem Drehzentrum P.

(II) Analog erhält man als diejenige Teilmenge der gesuchten Menge, für die das Dreieck $\triangle$ PQR negativ orientiert ist, ein zu ABCD kongruentes, punktweise entsprechendes Quadrat A''B''C''D'', entstanden durch eine Drehung von $\mathcal{E}$ im negativen Sinne um 60° mit dem Drehzentrum P.

<u>Die gesuchte Menge ist die Vereinigungsmenge von zwei Quadraten, die aus dem gegebenen durch Drehung um P um Winkel vom Maß 60° im positiven und negativen Sinn entstehen.</u>

Anmerkung: Die Aufgabe gestattet auch andere Lösungswege (z.B. Heranziehung der analytischen Geometrie oder der Vektorrechnung), jedoch werden die auftretenden Rechnungen meist umständlicher sein als die hier beschriebene elementargeometrische, auf (1) basierende Lösung.

2. Behauptung: Frage (a) ist zu verneinen; die größtmögliche Gliederzahl für eine F_n beträgt $s_n = 2n - 1$. Beweis durch vollständige Induktion: 7 Punkte

I. Die Behauptung ist richtig für $n = 1$. Dies folgt aus (3).

II. Angenommen, die Behauptung sei richtig für alle $n = 1, \ldots, k-1$; wir zeigen, daß sie dann auch für $n = k$ richtig ist ($k \geq 2$ eine natürliche Zahl):

(A) Beweis, daß Frage (a) für $n = k$ zu verneinen ist:
Gegeben sei eine F_k. Entfernt man aus ihr das erste Glied x_1 und alle Glieder, die ihm gleich sind, so erhält man eine F_{k-1}: (1), (2), (4) sind trivial; zu (3) ist nicht trivial der Nachweis, daß infolge des Weglassens eines p-Tupels aufeinanderfolgender Glieder kein (p+2)-Tupel aufeinanderfolgender Glieder zu einem Paar der Form $\{a,a\}$; $(a \neq x_1)$ werden kann; dies ergibt sich deswegen, weil andernfalls die gegebene F_k eine Teilfolge $\{x_1, a, x_1, a\}$ enthalten hätte.
Die entstandene F_{k-1} hat nach Induktionsvoraussetzung höchstens s_{k-1} Glieder; ihre Gliederzahl sei g genannt. Durch Wiedereinfügen der soeben weggelassenen Glieder erhält man die gegebene F_k zurück; da diese die Eigenschaft (3) besitzt, ist ein solches Wieder-

einfügen höchstens an $g + 1$ Stellen (abwechselnd mit den Gliedern der F_{k-1}) möglich. Also hatte die gegebene F_k höchstens $2g + 1 \leqq 2s_{k-1} + 1$ Glieder.

(B) Ist $x_1, \ldots, x_s$ eine F_k mit $x_s \neq x_1$, so ist auch $x_1, \ldots, x_s, x_1$ eine F_k. Beweis: (1), (2), (3) sind trivial; zu (4) ist nichttrivial der Nachweis, daß infolge des Anfügens von x_1 keine Teilfolge $\{a, x_1, a, x_1\}$ mit $a \neq x_1$ entstehen kann; dies ergibt sich deswegen, weil andernfalls die gegebene F_k eine Teilfolge $\{x_1, a, x_1, a\}$ enthalten hätte.

(C) Wegen (A) gibt es Folgen F_k mit größtmöglicher Gliederzahl s_k; eine solche Folge sei $\{x_1, \ldots, x_{s_k}\}$. Nach (B) ist in ihr $x_{s_k} = x_1$. Sind in ihr $x_{i_o}, \ldots, x_{i_j}$ $(i_o < \ldots < i_j)$ genau alle diejenigen Glieder, die $= x_1$ sind, so gilt also $j \geqq 1$; $i_o = 1$; $i_j = s_k$;

$$\{x_1,\ldots,x_{s_k}\} = \{x_{i_o};\ \underbrace{x_{i_o+1},\ldots,x_{i_1-1}}_{T_1};\ x_{i_1};\ldots;$$

$$x_{i_{j-1}};\ \underbrace{x_{i_{j-1}+1},\ldots,x_{i_j-1}}_{T_j};\ x_{i_j}\}.$$

Dann ergibt sich wegen (4) zunächst, daß die Teilfolgen

$$T_\lambda = \{x_{i_{\lambda-1}+1}, \ldots, x_{i_\lambda - 1}\} \quad (\lambda = 1,\ldots,j)$$

zu je zweien elementfremd sind. Kommen in T_λ genau r_λ verschiedene Zahlen vor $(\lambda = 1,\ldots,j)$, so ist demnach

$$\sum_{\lambda=1}^{i} r_\lambda = k - 1.$$

Weiter ergibt sich, daß T_λ eine F_{r_λ} mit maximaler Gliederzahl ist; nach Induktionsvoraussetzung ist also

$i_\lambda - i_{\lambda-1} - 1 = s_{r_\lambda} = 2r_\lambda - 1 \ (\lambda = 1,\ldots,j)$.

Somit erhalten wir

$$s_k = 1 + \sum_{\lambda=1}^{i} (i_\lambda - i_{\lambda-1}) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{i} 2r_\lambda$$

$$= 1 + 2\,(k - 1), \text{ w.z.b.w.}$$

3. (1) Behauptung: Sind p,q positive reelle Zahlen, so gilt $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$. 6 Punkte

Beweis: Es ist $(p - q)^2 \geq 0$, also $p^2 + q^2 \geq 2pq$; durch Multiplikation mit der positiven Zahl $\frac{1}{pq}$ folgt die Behauptung.

(2) Behauptung: Sind $x_1, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

(I) Die Behauptung ist richtig für n = 1:

Ist x_1 eine positive reelle Zahl, so gilt

$x_1 \cdot \frac{1}{x_1} = 1 \geq 1^2$.

(II) Angenommen, die Behauptung sei richtig für n = k; wir zeigen, daß sie dann auch für n = k + 1 richtig ist (k ≥ 2 eine natürliche Zahl):

Sind $x_1, \ldots, x_{k+1}$ positive reelle Zahlen, so gilt nach Induktionsvoraussetzung und nach (1)

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i \cdot \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{x_i} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_{k+1}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1}}{x_i}\right) + 1$$

$$\geq k^2 + \sum_{i=1}^{k} 2 + 1 = (k+1)^2.$$

(3) Behauptung des Satzes. Beweis:
Nach Voraussetzung ist $s > 0$, $s - a_i > 0$, also $\frac{s}{s - a_i} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Daher folgt aus (2)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{s}{s-a_i} - \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{s}{s-a_i} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{s}}{n-1} - n$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{s}{s-a_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{s-a_i}{s}}{n-1} - n \geq \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1},$$ w.z.b.w.

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

4. Jede Ecke P_i ($1 \leqq i \leqq n$) von V erhalte außer ihrer Bezeichnung P_i auch wahlweise die Bezeichnung P_{i+n}. 6 Punkte

Es sei $\mathfrak{D}$ die Menge der in der Aufgabe genannten Dreiecke. Jedes Dreieck aus $\mathfrak{D}$ bestimmt eindeutig denjenigen Bogen des Umkreises U von V, der die beiden Endpunkte der längsten Dreiecksseite verbindet und durch den dritten Eckpunkt hindurchgeht. Dieser Bogen werde gleichsinnig mit demjenigen Umlaufssinn von U orientiert, der durch die Reihenfolge $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gegeben wird. Die Ecken des betrachteten Dreiecks seien dann in diejenige Reihenfolge gebracht, in der sie von dem orientierten Bogen durchlaufen werden. Auf diese Weise läßt sich jedem Dreieck aus $\mathfrak{D}$ eindeutig ein Tripel (k, ℓ, m) natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften

(1) $\quad 1 \leqq k \leqq n; \quad k < \ell < m; \quad m - k < n$

zuordnen, derart daß P_k, P_ℓ, P_m Bezeichnungen der Ecken des betreffenden Dreiecks sind (weshalb die Zuordnung auch umkehrbar eindeutig ist). Die erhaltenen Tripel haben ferner die Eigenschaft

(2) $\quad m - k < \frac{n}{2}$;

denn da $\sphericalangle P_k P_\ell P_m$ stumpf ist, steht er auf einem Bogen von U, der zu einem überstumpfen Zentriwinkel gehört; folglich gehört der bei (1) genannte Bogen $P_k P_\ell P_m$ zu einem Zentriwinkel, der kleiner als ein gestreckter Winkel ist; somit enthält dieser Bogen weniger als $\frac{n}{2}$ (ihm gleichorientierte) Teilbögen der Form $P_i P_{i+1}$.

Sei umgekehrt $\mathfrak{Y}$ die Menge aller Tripel (k, ℓ, m) natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften (1), (2). Dann ist jedes Tripel aus $\mathfrak{Y}$ gemäß der obigen Vorschrift einem Dreieck aus $\mathfrak{D}$ zugeordnet, nämlich dem Dreieck $\triangle P_k P_\ell P_m$. (Daß $\sphericalangle P_k P_\ell P_m$ stumpf ist, folgt aus (2) durch Umkehrung des soeben durchgeführten Schlusses. Daß der Bogen $P_k P_\ell P_m$, der somit die beiden Eckpunkte der längsten Dreiecksseite verbindet und durch den dritten Eckpunkt hindurchgeht, auch gleichsinnig mit demjenigen Umlaufsinn von U orientiert ist, der durch die Reihenfolge $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gegeben wird, folgt aus (1); schließlich sind P_k, P_ℓ, P_m Bezeichnungen der Ecken des genannten Dreiecks).

Also sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{Y}$ gleichmächtig, und die gesuchte Anzahl ergibt sich durch folgende Abzählung von $\mathfrak{Y}$:

<u>1. Fall:</u> n ist gerade.

Für jedes $k = 1, \ldots, n$ gibt es

$\frac{n}{2} - 2$ Tripel mit $\ell = k + 1$,
nämlich mit $m = k + 2, \ldots, k + \frac{n}{2} - 1$; (*)

$\frac{n}{2} - 3$ Tripel mit $\ell = k + 2$,
nämlich mit $m = k + 3, \ldots, k + \frac{n}{2} - 1$; (*)

.....

1 Tripel mit $\ell = k + \frac{n}{2} - 2$,
nämlich mit $m = k + \frac{n}{2} - 1$ (**)

Die gesuchte Anzahl beträgt somit

$$n.(1+\ldots+(\tfrac{n}{2} - 2)) \overset{(***)}{=} n.\ \tfrac{1}{2}\ .(\tfrac{n}{2} - 2).(\tfrac{n}{2} - 1) = \tfrac{1}{8}n(n-2)(n-4).$$

(*) Zeilen, bei denen die Angabe der Tripelanzahl negativ würde, sind wegzulassen.

(**) Zeilen, bei denen infolge der Angabe von ℓ nicht $k < \ell$ würde, sind wegzulassen.
Fallen hierbei alle Zeilen einer Abzählung weg, so ist $\mathfrak{Y}$ leer.

(***) Eine Summe der (zunächst sinnlosen) Form $1 + \ldots + 0$ (leere Summe) ist = 0 zu setzen.

2. Fall: n ist ungerade.

Für jedes $k = 1, \ldots, n$ gibt es

$\frac{n}{2} - \frac{3}{2}$ Tripel mit $l = k + 1$,
nämlich mit $m = k + 2, \ldots, k + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$; (*)

$\frac{n}{2} - \frac{5}{2}$ Tripel mit $l = k + 2$,
nämlich mit $m = k + 3, \ldots, k + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$; (*)

.....

1 Tripel mit $l = k + \frac{n}{2} - \frac{3}{2}$,
nämlich mit $m = k + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$. (**)

Die gesuchte Anzahl beträgt somit

$n \cdot (1 + \ldots + (\frac{n}{2} - \frac{3}{2}))$ (***)

$= n \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{n}{2} - \frac{3}{2}) \cdot (\frac{n}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{8} n (n - 1) (n - 3)$.

5. Es sei (x_0, y_0, z_0) eine Lösung der Gleichung (1) $5x + 2y + z = 10n$. Dann ist $(x_0 + 2, y_0, z_0)$ Lösung der Gleichung (2) $5x + 2y + z = 10 (n + 1)$, und umgekehrt. Daraus ergibt sich: Zu jeder ganzzahligen nichtnegativen Lösung der Gleichung (1) gehört genau eine ganzzahlige nichtnegative Lösung der Gleichung (2). Zu jeder ganzzahligen nichtnegativen Lösung (x_1, y_1, z_1) der Gleichung (2) mit $x = x_0 + 2 \geq 2$ gehört zwar genau eine ganzzahlige nichtnegative Lösung der Gleichung (1), aber zu jeder ganzzahligen nichtnegativen Lösung der Gleichung (2) mit $0 \leq x_1 = x_0 + 2 < 2$, d.h. mit $x_1 = 0$ oder mit $x_1 = 1$, gehört genau eine ganzzahlige Lösung der Gleichung (1) mit $x_0 < 0$; (nämlich mit $x_0 = -2$ bzw. $x_0 = -1$). Nun ist $A (n + 1)$ die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen der Gleichung (2). Daher ist $A (n + 1) - A (n)$ gleich der Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen der Gleichung (2) mit $x_1 = 0$ und mit $x_1 = 1$. Für $x = 0$ ist (2) gleichbedeutend mit der Gleichung (3) $2y + z = 10 (n+1)$. 6 Punkte

Für jede nichtnegative ganzzahlige Lösung (y_1, z_1) muß $0 \leqq y_1 \leqq 5n + 5$ gelten. Umgekehrt erhält man zu jeder ganzen Zahl y_1 mit $0 \leqq y_1 \leqq 5n + 5$ genau eine nichtnegative ganzzahlige Lösung (y_1, z_1) von (3), da z in (3) den Koeffizienten 1 hat. Also hat (3) genau $5n + 6$ nichtnegative ganzzahlige Lösungen.
Für $x = 1$ ist (2) gleichbedeutend mit der Gleichung (4) $2y + z = 10n + 5$, woraus sich analog unter Verwendung von $0 \leqq y_1 \leqq 5n + 2$ ergibt, daß die Gleichung (4) genau $5n + 3$ ganzzahlige nichtnegative Lösungen hat.
Daher ist $A(n + 1) - A(n) = 10n + 9$.
Wir lassen (in Erweiterung der Aufgabenstellung) auch $n = 0$ zu.
Man sieht sofort $A(0) = 1$. Folglich erhält man:

$$A(n) = A(o) + \sum_{i=0}^{n-1} (A(i+1) - A(i))$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} (10\,i + 9)$$

$$= 1 + 10 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 9\,n$$

$$= 5n^2 + 4n + 1$$

6. (I) Kein P_i fällt mit Q zusammen. Wäre nämlich ein $P_i = Q$, so wäre der Abstand $\overline{P_iP_j}$ des nach Voraussetzung vorhandenen Punktes $P_j \neq P_i$ von P_i gleich und nicht, wie vorausgesetzt, größer als $\overline{P_jQ}$. 8 Punkte

(II) Die beiden Strecken QP_i und QP_j, $i \neq j$, treffen sich in Q unter einem Winkel, dessen Maß $> 60^\circ$ ist (vgl. auch Aufg. 1, OKL 11/12, 3. Stufe; da hier die Untersuchungen im Raum stattfinden, ist das Maß nach Definition außerdem $\leqq 180^\circ$).

Beweis (indirekt):

a) Lägen P_i und P_j auf dem gleichen von Q ausgehenden Strahl, so hätte der weiter von Q entfernte von ihnen von dem anderen einen kleineren Abstand als von Q im Widerspruch zur Voraussetzung.

b) Wäre das Gradmaß α des Winkels $\sphericalangle P_iQP_j$ positiv und nicht größer als 60°, so könnte $\overline{P_iP_j}$ nicht länger als jede der beiden anderen Seiten des Dreiecks $\triangle P_iQP_j$ sein, weil in diesem dann mindestens ein von $\sphericalangle P_iQP_j$ verschiedener Winkel ein Maß $\geq 60^\circ$ hätte und diesem eine Seite gegenüberläge, die nicht kürzer als P_iP_j ist.

(III) Bringt man alle von Q ausgehenden Strahlen, die mit QP_i einen Winkel einschließen, dessen Maß $\leq 30^\circ$ ist, mit der Kugel K um Q mit dem Radius von der Länge 1 zum Schnitt, so entsteht eine Kugelkappe K_i mit dem Flächeninhalt

$$F_i = 2\pi \cdot 1 \cdot h_i = 2\pi(1 - \cos 30^\circ) = \pi(2 - \sqrt{3}) \quad (1)$$

(vgl. Abb. L 11/12; 6)

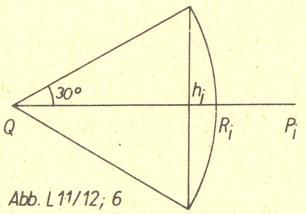

Abb. L 11/12; 6

(IV) K_i und K_j haben für $i \neq j$ keinen Punkt gemeinsam.

Beweis:

Ist R ein beliebiger Punkt von K und bezeichnet R_i den Schnittpunkt von K mit dem von Q

ausgehenden Strahl durch P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, so gilt auf Grund der Dreiecksungleichung

$$\overline{R_iR_j} \leqq \overline{R_iR} + \overline{RR_j} \qquad (2)$$

(die Dreiecksungleichung gilt für drei beliebige Punkte, auch wenn sie nicht die Ecken eines Dreiecks bilden oder wenn zwei oder alle drei zusammenfallen).

Bedeuten α_i und α_{i_j} die Maße der Winkel $\sphericalangle R_iQR$ bzw. $\sphericalangle R_iQR_j$, so ist $\overline{R_iR} = 2 \sin \frac{\alpha_i}{2}$ und $\overline{R_iR_j} = 2 \sin \frac{\alpha_{i_j}}{2}$.

Auf Grund von (II) ist $\alpha_{i_j} > 60^\circ$ und daher $\overline{R_iR_j} > 1$. Folglich ist wegen (2) wenigstens einer der beiden Summanden auf der rechten Seite $> \frac{1}{2}$ und mithin α_i oder α_j größer als 30°, so daß R nicht gleichzeitig K_i und K_j angehören kann.

(V) Auf Grund von (IV) ist die Summe der Inhalte der K_i nicht größer als die Kugeloberfläche, d.h., es ist

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \leqq 4\pi,$$

also wegen (1)

$$n\pi(2 - \sqrt{3}) \leqq 4\pi,$$

woraus

$$n \leqq \frac{4}{2 - \sqrt{3}} = 4(2 + \sqrt{3}) = 8 + 4\sqrt{3} < 15$$

folgt; denn wegen $4^2 \cdot 3 < 7^2$ ist $4 \cdot \sqrt{3} < 7$.

Zusatzbemerkung: Durch eine genauere Untersuchung läßt sich zeigen, daß unter den Bedingungen der Aufgabe sogar stets $n \leqq 12$ ist, wobei der Fall $n = 12$ realisiert werden kann.

Hinweis: Sollten Schüler den Punkt (IV) mit Hilfe einer geometrisch anschaulichen Schlußweise begründen, so möge dies als ausreichend betrachtet werden.