34. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Saison 1994/1995

Aufgaben und Lösungen

34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340721:

Großvater hatte seinen drei Enkeln einen Korb mit Nüssen mitgebracht, die sich diese ehrlich teilen sollten.

Lars, der allein im Haus war, nahm sich als erster seinen Anteil: Er entnahm dem Korb ein Drittel der Nüsse. Katja, die beim Nachhausekommen nicht wußte, daß sich Lars bereits bedient hatte, nahm von den im Korb verbliebenen Nüssen ein Drittel. Schließlich nahm ebenfalls Markus ein Drittel der im Korb verbliebenen Nüsse. Es waren noch 16 Nüsse im Korb.

Wie viele Nüsse hatte jedes der drei Kinder genommen?

Aufgabe 340722:

a) Ein Wettspielgewinn von 1 485 DM soll auf drei Teilnehmer im Verhältnis 2 : 3 : 4 aufgeteilt werden.

   Wieviel bekommt jeder?

b) Bei einem anderen Spiel erhält ein Teilnehmer ein Fünftel der Gewinnsumme, das sind 150 DM. Der Rest soll auf die beiden anderen Teilnehmer im Verhältnis 5 : 7 aufgeteilt werden.

   Wieviel bekommt jeder von ihnen?

c) Bei einem dritten Spiel wurde vereinbart, den Gewinn im Verhältnis der Einsätze aufzuteilen, mit denen sich die Teilnehmer an dem Wettspiel beteiligt hatten. Die Summe dieser Einsätze der drei Teilnehmer Anke, Bertram und Claus hatte 44 DM betragen, ferner gilt: Hätte Anke 6 DM mehr eingesetzt und hätte Claus das Doppelte seines Einsatzes eingesetzt, so hätten alle drei den gleichen Gewinnanspruch erreicht. Wie groß waren die drei Einsätze?

Aufgabe 340723:

In den Dreiecken ABC seien wie üblich die Größen der Innenwinkel bei A, B und C mit α, β bzw. γ bezeichnet. Ferner werde vorausgesetzt, daß die Mittelsenkrechte der Seite AB und die durch A gehende Winkelhalbierende sich in einem Punkt D schneiden, der auf der Seite BC liegt.

a) Leite eine Formel her, nach der in jedem Dreieck, das diese Voraussetzung erfüllt, γ von β abhängt! Für welche Werte von β gibt es ein Dreieck, das die genannten Voraussetzung erfüllt; für welche Werte von β gibt es kein solches Dreieck?

b) Ermittle alle diejenigen Werte von β, für die ein Dreieck, das die genannte Voraussetzung erfüllt, rechtwinklig ist!

c) Ermittle alle diejenigen Werte von β, für die ein Dreieck, das die genannte Voraussetzung erfüllt, gleichschenklig ist!

Aufgabe 340724:

a) Für fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen wird gefordert, daß ihre Summe 230 beträgt.

   Zeige, daß es genau eine Möglichkeit gibt, diese Forderung durch fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen zu erfüllen! Welches ist die erste dieser fünf Zahlen?

b) Jetzt wird gefordert, daß die Summe durch 23 teilbar sein und dabei einen möglichst kleinen Wert haben soll.

   Welches ist die erste von fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, mit denen diese Forderungen erfüllt werden?

34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 340721:
Waren zu Beginn n Nüsse im Korb, so folgt:

Lars nahm $\frac{n}{3}$ Nüsse, danach blieben $n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$ Nüsse im Korb.

Davon nahm Katja $\frac{1}{3}\frac{2n}{3} = \frac{2n}{9}$ Nüsse, danach blieben $\frac{2n}{3} - \frac{2n}{9} = \frac{4n}{9}$ Nüsse im Korb.

Davon nahm Markus $\frac{1}{3}\frac{4n}{9} = \frac{4n}{27}$ Nüsse, danach blieben $\frac{4n}{9} - \frac{4n}{27} = \frac{8n}{27}$ Nüsse im Korb.

Da dies 16 Nüsse waren, folgt $\frac{8n}{27} = 16$ und daraus $n = \frac{16 \cdot 27}{8} = 54$.

Also waren zu Beginn 54 Nüsse im Korb. Von ihnen nahm Lars 18 Nüsse, von den verbleibenden 36 Nüssen nahm Katja 12 Nüsse, von den verbleibenden 24 Nüssen nahm Markus 8 Nüsse.

2. Lösungsweg: Die am Ende übrigen 16 Nüsse waren zwei Drittel der Nüsse, die Markus vorfand. Das eine Drittel, das Markus nahm, waren halb so viele, also 8 Nüsse. Also hatte Markus $16 + 8 = 24$ Nüsse vorgefunden. Das waren wiederum zwei Drittel der Nüsse, die Katja vorfand. Das Drittel, das Katja nahm, waren folglich halb so viele wie 24, d.h. 12 Nüsse. Demnach hatte Katja $24 + 12 = 36$ Nüsse vorgefunden. Das waren zwei Drittel der Nüsse, die zu Beginn Lars vorfand; somit hatte Lars halb so viele, d.h. 18 Nüsse genommen. Damit sind die drei gesuchten Zahlen gefunden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340722:

a) Die Teilnehmer sollen der Reihe nach 2 Teile, 3 Teile und 4 Teile des Gewinns erhalten, wobei alle diese Teile gleichgroß sein sollen und zusammen den gesamten Gewinn ausmachen sollen.

   Da es also $2 + 3 + 4 = 9$ Teile sein sollen, muß jedes Teil $1\,485\,\text{DM} : 9 = 165\,\text{DM}$ betragen. Also erhalten die Teilnehmer der Reihe nach

   $$2 \cdot 165\,\text{DM} = 330\,\text{DM}, \qquad 3 \cdot 165\,\text{DM} = 495\,\text{DM}, \qquad 4 \cdot 165\,\text{DM} = 660\,\text{DM}.$$

b) Da ein Fünftel des Gewinns 150 DM sind, beträgt der gesamte Gewinn $5 \cdot 150\,\text{DM} = 750\,\text{DM}$. Die im Aufgabentext genannten beiden anderen Teilnehmer bekommen zusammen $750\,\text{DM} - 150\,\text{DM} = 600\,\text{DM}$. Zur Aufteilung dieses Betrages im Verhältnis $5 : 7$ ergibt sich entsprechend wie in a) wegen $5 + 7 = 12$ und $600 : 12 = 50$:

   Die beiden anderen Teilnehmer erhalten der Reihe nach

   $$5 \cdot 50\,\text{DM} = 250\,\text{DM}, \qquad 7 \cdot 50\,\text{DM} = 350\,\text{DM}.$$

c) Waren a, b, c die in DM gerechneten Einsätze von Anke, Bertram bzw. Claus, so gilt $a + b + c = 44$ und $a + 6 = 2c = b$. Setzt man hieraus $a = 2c - 6$ und $b = 2c$ in die erste Gleichung ein, so folgt

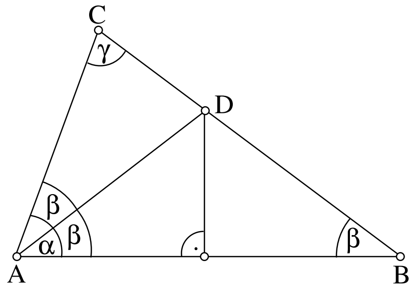
$2c - 6 + 2c + c = 44$, $5c = 50$, $c = 10$ und damit weiter $b = 20$, $a = 14$. Also wurden folgende Beträge gesetzt:

Anke: 14 DM, Bertram: 20 DM, Claus: 10 DM.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340723:

a) (Siehe Abbildung rechts) Da D auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, gilt $\overline{AD} = \overline{BD}$. Nach dem Basiswinkelsatz für Dreieck ABD folgt daraus $\overline{\sphericalangle BAD} = \overline{\sphericalangle ABD} = \beta$.



Da AD Winkelhalbierende ist, folgt weiter

$$a = 2\beta \qquad (1)$$

und damit nach dem Innenwinkelsatz die gesuchte Formel

$$\gamma = 180° - 3\beta. \qquad (2)$$

Weiterhin folgt

I. Für alle $\beta \geq 60°$ gibt es kein Dreieck der geforderten Art; denn gäbe es ein solches, so müßte, wie eben gezeigt wurde, (2) gelten. Das ist nicht möglich, da sich ein Wert $\gamma le 0$ ergäbe.

II. Für alle positiven $\beta < 60°$ gibt es dagegen ein Dreieck der geforderten Art. Denn wählt man zu einem solchen β die Werte α und γ aus (1) und (2), so hat man drei positive Winkelgrößen α, β, γ mit $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Es gibt daher ein Dreieck ABC mit diesen Innenwinkelgrößen. Ist darin AD Winkelhalbierende, so ist das Dreieck ABD nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig, also liegt D auch auf der Mittelsenkrechten von AB.

b) Mit $\beta = 90°$ kann ein Dreieck, das die in der Aufgabe genannte Voraussetzung erfüllt, nicht rechtwinklig sein; denn für diesen Wert β gibt es nach a) I. kein solches Dreieck.

Dagegen gibt es ein solches Dreieck, das mit $\alpha = 90°$ rechtwinklig ist; denn gemäß (1) kann man $\beta = 45°$ wählen und dann wie in a) II. vorgehen.

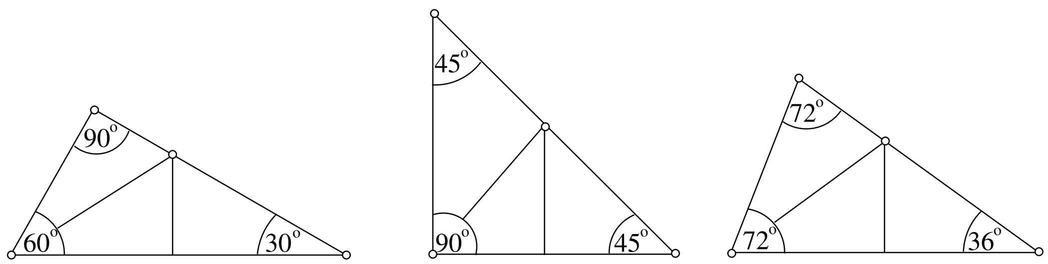
Ebenso ist $\gamma = 90°$ gemäß (2) mit $\beta = 30°$ erreichbar.

Die in (b) gesuchten Werte sind also genau $\beta = 30°$ und $\beta = 45°$.

c) Mit $\alpha = \beta$ kann ein Dreieck, das die in der Aufgabe genannte Voraussetzung erfüllt, nicht gleichschenklig sein; denn nach (1) ergäbe sich $2\beta = \beta$, also $\beta = 0$ und damit kein Dreieck.

Dagegen ist $\beta = \gamma$ gemäß (2) mit $\beta = 180° - 3\beta$, also $\beta = 45°$ erreichbar, ebenso $\alpha = \gamma$ gemäß (1) und (2) mit $2\beta = 180° - 3\beta$, also $\beta = 36°$.

Die in (c) gesuchten Werte sind folglich genau $\beta = 45°$ und $\beta = 36°$.



Bemerkungen: Zu a) kann akzeptiert werden, wenn die Gewinnung von $\beta < 60°$ (als Äquivalent zur Existenz eines Dreiecks, in dem die Mittelsenkrechte von AB und die Winkelhalbierende durch A sich auf BC schneiden) weniger detailliert ausformuliert wird. Entsprechendes gilt zu b) und c), wobei auch eine stärkere Berufung auf Zeichnungen wie die Abbildungen unten möglich ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340724:

a) Fünf Zahlen der Form n, $n+1$, ..., $n+4$ erfüllen genau dann die Forderung $n+n+1+...+n+4 = 230$, wenn $5n + 10 = 230$ gilt. Das trifft genau dann zu, wenn die erste dieser Zahlen $n = 44$ ist.

b) Für jede natürliche Zahl n ist die betrachtete Summe $5n+10$ durch 5 teilbar. Sie ist genau dann auch, wie gefordert, durch 23 teilbar, wenn sie durch $5 \cdot 23 = 115$ teilbar ist; denn 5 und 23 sind zueinander teilerfremd. Den kleinsten durch 115 teilbaren Wert erreicht $5n + 10$, wenn $5n + 10 = 115$ gilt. Das trifft genau dann zu, wenn die erste der fünf Zahlen $n = 21$ ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission