34. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Saison 1994/1995

Aufgaben und Lösungen

34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340621:

Ein Jogger benötigt im Dauerlauf für 100 m jeweils 20 Sekunden.

a) Welche Stecke schafft er, wenn er dieses Tempo 20 Minuten lang unverändert durchhält?

b) Welche Strecke schafft er, wenn sich in den insgesamt gelaufenen 20 Minuten auch Zeiten befinden, in denen er für 100 m jeweils 30 Sekunden benötigt, und zwar auf Teilstrecken, die zusammen 1600 m betragen?

Aufgabe 340622:

Die Gärten von Familie Kniffel und Familie Knobel haben jeweils die Form eines Quadrates und grenzen so aneinander, wie die Abbildung a zeigt.

Die Fläche von Kniffels Garten beträgt 1225 Quadratmeter, die von Knobels Garten 625 Quadratmeter.

a) Welche Breite $\overline{AD}$ bzw. $\overline{EF}$ haben die Gärten?

b) Familie Kniffel gibt Familie Knobel ein Stück ihres Gartens ab. Danach haben beide Gärten gleichgroße Fläche. Wie groß ist diese?

c) Abbildung b zeigt die neue Aufteilung. Um welche Länge $\overline{GH}$ ist Knobels Garten länger geworden?

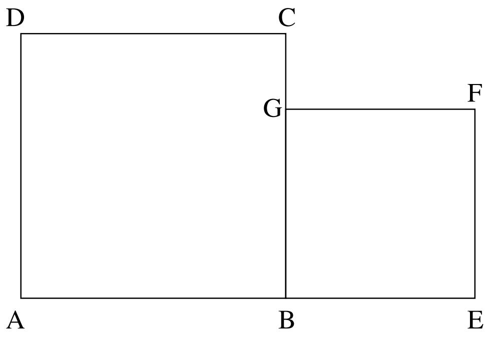


Abbildung a

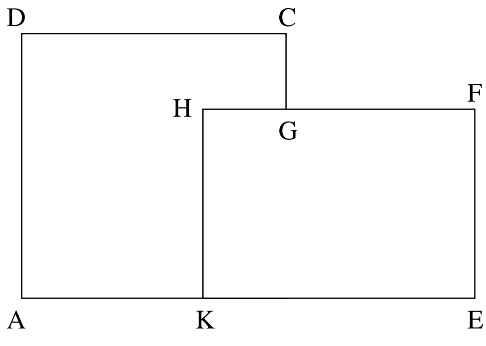


Abbildung b

Aufgabe 340623:

Nach folgenden Regeln läßt sich ein ”Zahlenzug” bilden:

- Im ersten ”Waggon” steht eine natürliche Zahl größer als 1.
- Steht in einem ”Waggon” eine gerade Zahl, so steht im nächsten ”Waggon” die halb so große Zahl.

- Steht in einem "Waggon" eine ungerade Zahl größer als 1, so steht im nächsten "Waggon" die um 1 kleinere Zahl.
- Steht in einem "Waggon" die Zahl 1, so ist der "Zahlenzug" mit diesem "Waggon" beendet.

a) Nenne alle diejenigen "Zahlenzüge", die aus genau 4 "Waggons" bestehen! Begründe auch, daß deine Aufzählung vollständig ist!

b) Welches ist die größtmögliche Zahl, die im ersten "Waggon" eines "Zahlenzuges" vorkommen kann, der aus genau 7 "Waggons" besteht? Nenne einen solchen "Zahlenzug" mit dieser Anfangszahl und zeige, daß eine größere Anfangszahl nicht möglich ist!

c) Welches ist die kleinstmögliche Zahl, die im ersten "Waggon" eines "Zahlenzuges" vorkommen kann, der aus genau 7 "Waggons" besteht? Nenne einen solchen "Zahlenzug" mit dieser Anfangszahl und zeige, daß eine kleinere Anfangszahl nicht möglich ist!

Aufgabe 340624:

Zu einem *Dominospiel mit den Zahlen von 0 bis 6* gehören 28 Steine. Jede Zusammenstellung von zwei der Zahlen kommt auf einem dieser Steine vor. Abb. 340624 a zeigt als Beispiel den Stein mit den Zahlen 2 und 5. (Auch die 0 wird hier als natürliche Zahl bezeichnet.)

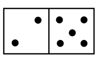


Abb. A 340624 a

Aus vier geeignet ausgewählten Steinen eines Dominospiels kann man ein "Fenster" wie in Abb A 340624 b legen, und zwar so, daß auf jeder der vier "Seiten" des Fensters dieselbe Summe auftritt. Im Beispiel der Abb. A 340624 b beträgt diese "Seitensumme" 9.

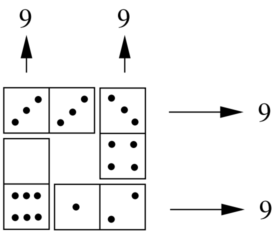


Abb. A 340624 b

a) Nenne je ein Beispiel für ein Fenster mit der Seitensumme 2 und eines mit der Seitensumme 16!

b) Begründe, daß es kein Fenster mit der Seitensumme 18 gibt!

c) Es gibt noch drei weitere natürliche Zahlen kleiner 19 mit der Eigenschaft, daß kein Fenster die betreffende Zahl als Seitensumme hat. Finde diese Zahlen und begründe für sie die Unmöglichkeit, Seitensumme eines Fensters zu sein!

34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 340621:

(a) Da der Jogger in 20 Sekunden 100 m schafft und da 20 Minuten 60 mal so viel Zeit sind wie 20 Sekunden, schafft er in 20 Minuten $60 \cdot 100\text{ m} = 6\,000\text{ m}$.

(b) Während er die 1 600 m mit der niedrigeren Geschwindigkeit läuft, braucht er 16 mal so viel Zeit wie für 100 m, also $16 \cdot 30$ Sekunden $= 480$ Sekunden $= 8$ Minuten. Wegen $20 - 8 = 12$ bleiben 12 Minuten für die höhere Geschwindigkeit. Da eine Minute 3 mal so viel Zeit wie 20 Sekunden ist, schafft er in diesen 12 Minuten $3 \cdot 12 \cdot 100\text{ m} = 3\,600\text{ m}$.

Insgesamt legt er so $1\,600\text{ m} + 3\,600\text{ m} = 5\,200\text{ m}$ zurück.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340622:

(a) Wegen $35 \cdot 35 = 1225$ hat ein Quadrat mit der Seitenlänge 35 m den Flächeninhalt 1225 Quadratmeter. Also ist die Breite von Kniffels Garten $\overline{AD} = 35\text{ m}$. Aus $25 \cdot 25 = 625$ folgt ebenso $\overline{EF} = 25\text{ m}$.

(b) Wegen $1225 + 625 = 1850$ haben beide Gärten zusammen 1850 Quadratmeter. Nach der Aufteilung in zwei gleichgroße Flächen hat jede von ihnen wegen $1850 : 2 = 925$ somit 925 Quadratmeter.

(c) In dem Rechteck $KEFH$ mit diesem Flächeninhalt und der Seitenlänge $\overline{EF} = 25\text{ m}$ ist wegen $925 : 25 = 37$ die andere Seitenlänge $\overline{FH} = 37\text{ m}$. Damit ergibt sich

$$\overline{GH} = \overline{FH} - \overline{FG} = 37\text{ m} - 25\text{ m} = 12\text{ m}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340623:
Für jeden "Zahlenzug" gilt: Im letzten "Waggon" steht eine 1. Steht in einem "Waggon" eine ungerade Zahl, so steht im vorangehenden "Waggon" das Doppelte. Steht aber in einem "Waggon" eine gerade Zahl, so steht im vorangehenden "Waggon" entweder die um 1 größere Zahl oder das Doppelte.

(a) Hieraus folgt der Reihe nach: Im vorletzten "Waggon" steht eine 2, davor entweder eine 3 oder eine 4; vor der 3 steht eine 6; vor der 4 steht entweder eine 5 oder eine 8.

Damit ist als vollständige Aufzählung der "Zahlenzüge" aus genau 4 "Waggon" begründet: (6, 3, 2, 1), (5, 4, 2, 1), (8, 4, 2, 1).

(b) Wählt man bei jeder geraden Zahl die Möglichkeit, als vorangehende Zahl das Doppelte zu nehmen, so erhält man als "Zahlenzug" aus genau 7 "Waggon": (64, 32, 16, 8, 4, 2, 1). Da das Verdoppeln einer Zahl, die größer als 1 ist, stets zu einem größeren Ergebnis führt als das Addieren von 1, ist eine größere Anfangszahl nicht möglich; damit ist als größtmögliche Anfangszahl 64 nachgewiesen.

(c) Im Anschluß an (a) folgt der Reihe nach:

Als fünftletzte Zahl sind genau möglich: Wenn sie ungerade ist, 7 und 9; wenn sie gerade ist, 10, 12, 16;

als sechstletzte Zahl: ungerade 11, 13, 17; gerade 14, 18, 20, 24, 32.

Für die hierzu vorangehende Anfangszahl ist damit als kleinste ungerade Zahl 15, als kleinste gerade Zahl 22, also insgesamt 15 als kleinstmögliche Anfangszahl nachgewiesen.

Der "Zahlenzug" hierzu lautet (15, 14, 7, 6, 3, 2, 1).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

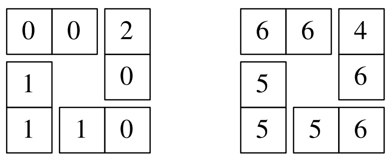
Lösung 340624:

(a) Die Abbildung zeigt je ein Beispiel der geforderten Art.

(b) Die einzige Darstellung von 18 als Summe dreier Zahlen von 0 bis 6 ist $18 = 6+6+6$. Ein Fenster mit der Seitensumme 18 könnte daher nur aus Dominosteinen (6,6) bestehen. Da nach dem Aufgabentext das Fenster aber aus Steinen eines Dominospiels zu legen wäre und das Dominospiel den Stein (6,6) nur einmal enthält, ist ein solches Fenster nicht möglich.

(c) Drei solche Zahlen sind 0, 1 und 17. Die einzige Summendarstellung (ohne Beachtung der Reihenfolge) ist nämlich $0 = 0+0+0$ bzw. $1 = 0+0+1$ bzw. $17 = 6+6+5$. Daher könnte ein Fenster mit der Seitensumme 0 nur aus Steinen (0,0) bestehen, ist also nicht möglich; und zur Seitensumme 1 bzw. 17 müßte gelten:

Um auf der oberen waagerechten Seite diese Summe zu erreichen, müßte entweder links oben der Stein (0,1) bzw. der Stein (6,5) liegen und rechts davon eine 0 bzw. 6 vorkommen, oder es müßte links oben (0,0) bzw. (6,6) liegen und rechts davon 1 bzw. 5. Da auch auf der rechten Seite die Summe 1 bzw. 17 zu erreichen ist, folgt in beiden Fällen: Mindestens einer der Steine links oben, rechts oben müßte (0,1) bzw. (6,5) sein. Ebenso folgt: Mindestens einer der Steine rechts unten, links unten müßte (0,1) bzw. (6,5) sein. Da das Dominospiel auch diesen Stein nur einmal enthält, sind somit ebenfalls die Seitensummen 1 und 17 als nicht erreichbar nachgewiesen.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission