34. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Saison 1994/1995

Aufgaben und Lösungen

34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

<u>Aufgabe 340521:</u>

In einem Zirkus treten vier Artisten auf. Sie heißen Meier, Neumann , Opitz und Pfeifer. Ihre Vornamen sind, möglicherweise in anderer Reihenfolge: Dieter, Erich, Fritz und Gert.

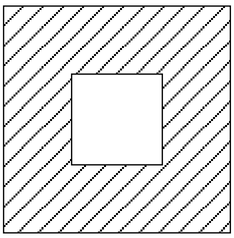
Außerdem ist bekannt:

(1) Die Reihenfolge ihrer Auftritte ist: Pfeifer, Fritz, Meier, Erich.

(2) Diese Auftritte sind, möglicherweise in anderer Reihenfolge: Dieter jongliert, Erich zaubert, Neumann tritt als Clown auf und Pfeifer arbeitet auf dem Drahtseil.

Zeige, daß durch diese Angaben für jeden der Artisten Meier, Neumann, Opitz und Pfeifer eindeutig bestimmt ist, welchen Vornamen er hat! Nenne diese vier zusammengehörenden Vor- und Familiennamen!

<u>Aufgabe 340522:</u>



Die Abbildung zeigt eine ringförmige Fläche. Sie wird von einem Quadrat der Seitenlänge 4 cm und einem Quadrat der Seitenlänge 2 cm eingeschlossen. Beide Quadrate haben denselben Mittelpunkt, jede Seite des kleinen Quadrats ist zu einer Seite des großen Quadrates parallel. Nun sollen mehrere Geraden gezeichnet werden, so daß sie, genügend verlängert, die ringförmige Fläche in Teilflächen zerlegen. Die Teilflächen einer Zerlegung sollen einander gleiche Größe und gleiche Form haben. Folgende Anzahlen sollen erreicht werden:

Aufgabe	Anzahl der Geraden	Anzahl der entstehenden Teilflächen
(a)	2	4
(b)	3	6
(c)	4	8
(d)	6	12

Fertige zu *jeder* der Aufgaben (a), (b), (c), (d) eine Zeichnung an!

Zu *zwei* der Aufgaben (a), (b), (c), (d) fertige noch je eine weitere Zeichnung an, in der die Teilflächen von anderer Gestalt sind als in den vorigen Zeichnungen!

Eine Begründung oder Beschreibung wird nicht verlangt.

Aufgabe 340523:

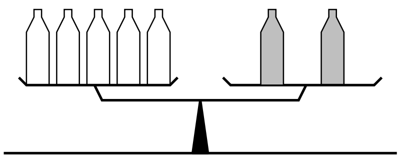
Man kann jede natürliche Zahl 1, 2, 3, ... als eine Summe darstellen, in der jeder Summand eine 1 oder eine 2 ist. Zum Beispiel gibt es für die Zahl 3 unter Beachtung der Reihenfolge genau die Darstellungen

$$\begin{aligned} 3 &= 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 2 \\ &= 2 + 1 \end{aligned}$$

(a) Gib auch für jede der Zahlen 4, 5 und 6 alle Darstellungen an!

(b) Wie groß ist für jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils die Anzahl aller Darstellungen? Finde *eine Gesetzmäßigkeit, die für diese sechs Anzahlen gilt* ! Wie viele Darstellungen muß es - wenn die von dir genannte Gesetzmäßigkeit sogar allgemein gilt - für die Zahl 10 geben?

Aufgabe 340524:



Auf einer Waage sind fünf links stehende leere Mineralwasserflaschen mit zwei rechts stehenden vollen im Gleichgewicht (siehe Abbildung).

(a) Britta füllt zwei leere Flaschen mit Mineralwasser und erreicht dann, daß wieder Gleichgewicht eintritt, indem sie auf die rechte Waagschale leere Flaschen dazustellt. Wie viele leere Flaschen sind das?

(b) Jan entleert dann eine der rechts stehenden Flaschen und nimmt von der linken Waagschale eine leere Flasche weg. Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?

(c) Pia nimmt alle Flaschen von der Waage und stellt dann links zwei volle Flaschen und eine leere Flaschen auf, rechts eine volle Flasche und drei leere Flaschen. Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?

34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 340521:

Nach (1) heißt Pfeifer weder Fritz noch Erich, nach (2) heißt er auch nicht Dieter. Daher gilt:

Pfeifer heißt Gert. (3)

Nach (1) heißt Meier weder Fritz noch Erich, nach (3) heißt er auch nicht Gert. Daher gilt:

Meier heißt Dieter. (4)

Nach (2) heißt Neumann nicht Erich, nach (3) und (4) heißt er weder Gert noch Dieter. Daher gilt:

Neumann heißt Fritz. (5)

Wegen (3), (4), (5) verbleibt schließlich nur:

Opitz heißt Erich. (6)

Damit ist gezeigt, daß die Vornamen zu den Familiennamen eindeutig bestimmt sind, und diese zusammengehörenden Namen sind angegeben.

Bemerkungen: Zur Lösungsfindung kann man Tabellen verwenden, die alle Möglichkeiten zusammengehörender Namen zeigen. Darin kann man z. B. mit einem "+" oder "-" kennzeichnen, daß eine Möglichkeit ausscheidet bzw. stattfindet. Man kann auch *über* einem solchen Zeichen angeben, *woraus es folgt*, und *darunter*, was *damit bewiesen* ist. Eine solche Lösungsdarstellung bieten etwa die Tabellen:

	M	N	O	P
D		(2) -		(2) -
E	(1) -	(1) -		(1), (2) -
F	(1) -			(1) -
G				+ (3)

	M	N	O	P
D	+ (4)	-		-
E	-	-		-
F	-	+ (5)		-
G	(3) -	(3) -	(3) -	+

	M	N	O	P
D	+	-	(4) -	-
E	-	-	+ (6)	-
F	-	+	(5) -	-
G	-	-	-	+

Bei der Einschätzung tabellarischer Schülerlösungen sollte berücksichtigt werden, ob bzw. wie weit aus der Darstellung die Stichhaltigkeit der Herleitung ersichtlich ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340522:

Die Abbildung zeigt Zeichnungen der geforderten Art.

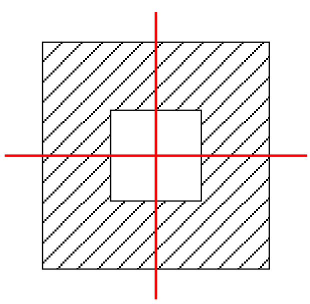


Abbildung a_1

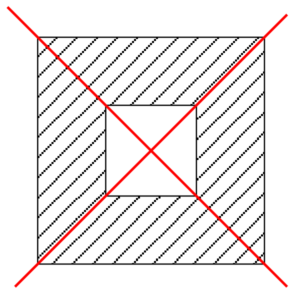


Abbildung a_2

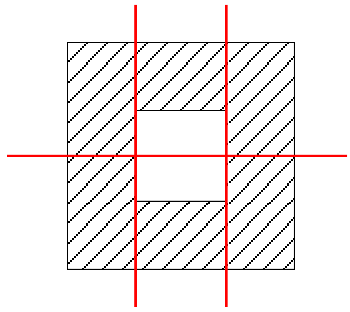


Abbildung b

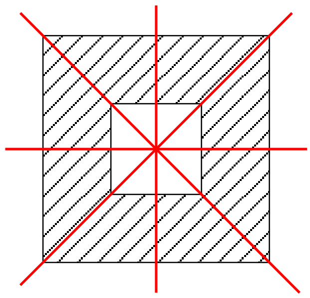


Abbildung c

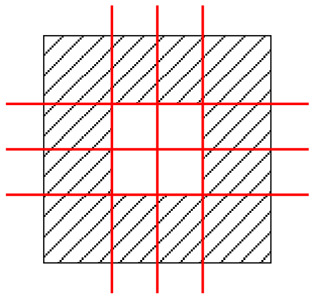


Abbildung d_1

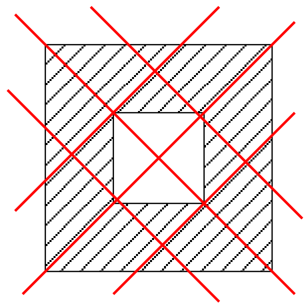


Abbildung d_2

Bemerkungen: Die Hervorhebung (Schraffur) von Flächen wird natürlich nicht vom Schüler verlangt. Gefordert wird die mit Zeichengenauigkeit vorliegende Kongruenz der Teilflächen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340523:

(a) Die gesuchten Darstellungen sind:

$$\begin{aligned}4 &= 1+1+1+1\\ &= 1+1+2\\ &= 1+2+1\\ &= 2+1+1\\ &= 2+2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5 &= 1+1+1+1+1\\ &= 1+1+1+2\\ &= 1+1+2+1\\ &= 1+2+1+1\\ &= 2+1+1+1\\ &= 1+2+2\\ &= 2+1+2\\ &= 2+2+1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6 &= 1+1+1+1+1+1\\ &= 1+1+1+1+2\\ &= 1+1+1+2+1\\ &= 1+1+2+1+1\\ &= 1+2+1+1+1\\ &= 2+1+1+1+1\\ &= 1+1+2+2\\ &= 1+2+1+2\\ &= 1+2+2+1\\ &= 2+1+1+2\\ &= 2+1+2+1\\ &= 2+2+1+1\\ &= 2+2+2.\end{aligned}$$

(b) Als Anzahlen erhält man:

Darzustellende Zahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Darstellungen	1	2	3	5	8	13

Für sie gilt folgende Gesetzmäßigkeit: Die Summe zweier benachbarter Anzahlen ist gleich der darauffolgenden Anzahl.

Wenn diese Gesetzmäßigkeit allgemein gilt, so erhält man als Fortsetzung:

Darzustellende Zahl	7	8	9	10
Anzahl der Darstellungen	8+13=21	13+21=34	21+34=55	34+55=89

Für die Zahl 10 muß es dann also genau 89 Darstellungen geben.

Hinweis zur Korrektur: Falls in einer Schülerlösung eine Gesetzmäßigkeit genannt wird, die zwar *für die richtigen Darstellungsanzahlen der Zahlen* 1, 2, ..., 6 gilt, aber *nicht allgemein*, und falls dann *durch korrekte Schlüsse aus dieser Gesetzmäßigkeit* eine (möglicherweise als Darstellungsanzahl falsche) Angabe für die Zahl 10 hergeleitet wird, so ist die betreffende Anforderung des Aufgabentextes (Teilaufgabe (b), letzter Satz) als erfüllt einzuschätzen. Freilich empfiehlt es sich dann, den Schüler - falls eine solche Rückkopplung möglich ist - auf den Sachverhalt aufmerksam zu machen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340524:

(a) Werden rechts noch drei leere Flaschen dazugestellt, so stehen sowohl links als auch rechts je zwei volle und drei leere Flaschen; also tritt Gleichgewicht ein. Die gesuchte Anzahl ist somit 3.

(b) Denkt man sich in der Abbildung des Aufgabentextes auf beiden Waagschalen das Gewicht von zwei leeren Flaschen entfernt, so folgt: Drei leere Flaschen haben dasselbe Gewicht wie das Mineralwasser, das zwei Flaschen füllt. Daraus ergibt sich die Aussage: *Eine leere Flasche hat ein kleineres Gewicht als das Wasser für eine Flasche.* Da Jan links die Flasche und rechts das Wasser wegnimmt und vorher Gleichgewicht herrschte, neigt sich nun die linke Waagschale nach unten.

(c) Die Aufstellung, die Pia vornimmt, kann stattdessen auch aus der nach (b) erreichten Aufstellung erhalten werden, indem man dort links und rechts je eine leere Flasche wegnimmt. Daher neigt sich auch bei Pias Aufstellung die linke Waagschale nach unten.

Andere Lösungsmöglichkeiten entstehen, wenn man die Angaben des Aufgabentextes in Gleichungen überführt und diese auflöst. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten dafür, welche Größen als Unbekannte eingeführt werden, z.B. das Gewicht f einer leeren Flasche und das Gewicht w des Wassers für eine Flasche. Eine andere Möglichkeit ist:

Für das Gewicht f einer leeren Flasche und das Gewicht g einer gefüllten Flasche gilt

$$5 = 2g.$$

In (a) entsteht links $3f + 2g$, also muß dies auch rechts erreicht werden, d.h., das Gewicht rechts ist um $3f$ zu erhöhen.

Zu (b) und (c) löst man (1) etwa nach g auf: $g = \frac{5}{2}f$

In (b) entsteht links $(2f + 2g =)7f$, rechts $(4f + g =)6\frac{1}{2} \cdot f$;

in (c) entsteht links $(f + 2g =)6f$, rechts $(3f + g =)5\frac{1}{2} \cdot f$;

in beiden Fällen links mehr als rechts.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission