33. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Saison 1993/1994

Aufgaben und Lösungen

33. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330631:

Finde alle Möglichkeiten, drei natürliche Zahlen a, b, c so zusammenstellen, daß $a+b+c = 12$ und $c-b = 3$ gilt!

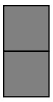
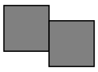
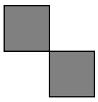
Hinweis:

1. Die Null soll auch als natürliche Zahl bezeichnet werden.
2. Es wird auch zugelassen, daß sich unter den Zahlen a, b, c solche befinden, die einander gleich sind.

Aufgabe 330632:

Aus 21 Quadraten der Seitenlänge 1 cm soll eine Figur F zusammengesetzt werden:

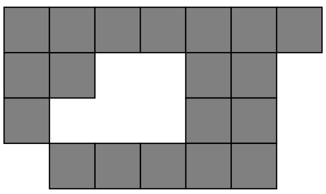
An das erste Quadrat legt man ein zweites so an, daß sie beide genau eine Seite gemeinsam haben: 

oder  (dagegen *nicht*  und auch *nicht* )

Dann legt man immer das nächste Quadrat so an, daß es ebenfalls genau eine Seite mit einem schon hingelegten Quadrat gemeinsam hat.

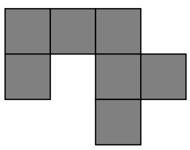
Am Ende soll die Figur F folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Es soll keine freie Fläche geben, die ganz von Quadraten der Figur F umschlossen wäre, zum Beispiel:



(2) Die Figur F soll ganz in ein großes Quadrat der Seitenlänge 6 cm hineinpassen.

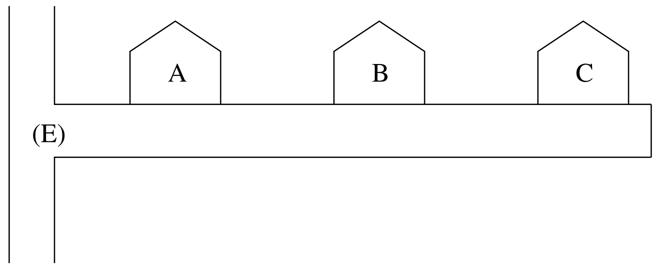
(3) Die Figur F soll den Umfang 42 cm haben. *Beispiel:* Der *Umfang* der folgenden Figur beträgt 16 cm.



Zeichne eine solche Figur F!

Aufgabe 330633:

In einer Sackgasse, die an einer Ecke (E) beginnt, stehen drei Häuser A, B, C in einer Reihe:



Ein Briefträger, der die Sackgasse an der Ecke (E) betritt, dann zu jedem Haus Post bringt und danach zur Ecke (E) zurückkehrt, kann dies z.B. in der Reihenfolge $(E) \Rightarrow A \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow (E)$ tun. Er kann es aber z.B. auch in der Reihenfolge $(E) \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C \Rightarrow (E)$ tun; dabei macht er jedoch einen Umweg, weil er die Strecke zwischen A und B öfter als nötig durchläuft.

(a) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt? Nenne alle diese Möglichkeiten!

(b) Jetzt sollen in der Sackgasse vier Häuser in einer Reihe stehen. Wieviele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es hierzu insgesamt? Nenne auch alle diese Möglichkeiten!

(c) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt, wenn in der Sackgasse 10 Häuser in einer Reihe stehen?

Hinweis: Für diese Aufgabe kann man Überlegungen beim Lösen von (a) und (b) nutzen.

Aufgabe 330634:

Sechs Kugeln, und zwar drei blaue und drei gelbe, werden an Annette, Bernd und Christiane verteilt. Jedes dieser drei Kinder bekommt wenigstens eine Kugel, aber höchstens drei Kugeln. Damit die Verteilung nicht so leicht zu erkennen ist, macht Dieter drei falsche Aussagen.

Erika meint dennoch: Wenn man weiß, daß alle diese Aussagen falsch sind, ist die Verteilung der Kugeln (für jedes Kind die Anzahlen der blauen und der gelben Kugeln) dadurch eindeutig bestimmt.

Die drei Aussagen von Dieter lauten:

(1) Die blauen Kugeln wurden an weniger als drei Kinder verteilt.

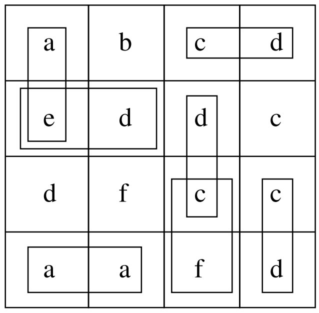
(2) Annette bekam genau zwei Kugeln.

(3) Bernd bekam Kugeln unterschiedlicher Farben.

Hat Erika recht? Begründe Deine Antwort!

Aufgabe 330635:

Ein 4×4 - Feld soll mit Buchstaben so gefüllt werden, wie folgendes Bild an einem Beispiel zeigt:



In jedem so gefüllten Feld kann man "Wörter" lesen, die aus zwei Buchstaben bestehen. Die "Wörter" liest man entweder von links nach rechts oder von oben nach unten. (Als Beispiele sind die "Wörter" ae, cd, ed, dc, cf, cd und aa hervorgehoben. Man hat also auch solche "Wörter" zu beachten, die einen Buchstaben gemeinsam haben, wie im Beispiel ae mit ed und dc mit cf.)

"Wörter", die sich nur in der Reihenfolge der Buchstaben voneinander unterscheiden (wie im Beispiel cd und dc), gelten nicht als einander gleich.

Folgende Bedingungen werden zusätzlich verlangt:

(1) In keinem "Wort" dürfen die beiden Buchstaben einander gleich sein (wie im Beispiel im "Wort" aa).

(2) Kein "Wort" darf mehrfach vorkommen (wie im Beispiel das "Wort" cd).

a) Finde eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und nur die 7 Buchstaben a, b, c, d, e, f, g verwendet!

b),c) Gibt es auch eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und

b) nur 6 Buchstaben,

c) nur 5 Buchstaben

verwendet? Begründe Deine Antworten!

Aufgabe 330636:

Anja und Bernd spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

Verwendet werden 8 Karten, jede mit genau einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, und ein Spielbrett aus 7 Feldern:

Zunächst wird eine natürliche Zahl n vereinbart. Dann legen Anja und Bernd abwechselnd (beginnend mit Anja) auf je ein beliebiges Feld der Figur, das noch frei ist, eine der noch nicht verwendeten Karten. Am Ende ist eine siebenstellige Zahl entstanden. Ist sie durch n teilbar, so hat Anja gewonnen, anderenfalls Bernd.

a) Finde zwei der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, für die gilt: Ist diese Zahl als n vereinbart worden, so kann Anja den Gewinn erzwingen, gleichgültig, wie Bernd spielt! Erkläre, wie Anja dies tun kann!

b) Beweise folgende Aussage! Wurde $n = 9$ vereinbart, so gewinnt stets Bernd, gleichgültig, welche Karten beide Spieler legen.

c) Untersuche, ob im Fall, daß $n = 21$ vereinbart wurde, einer der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, gleichgültig, wie der andere spielt!

33. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 330631:

Es muß $b \leq 4$ sein; denn wäre $b \geq 5$, so folgte wegen $c - b = 3$, daß $c \geq 8$ wäre. Damit wäre bereits $b + c \geq 13$, also erst recht $a + b + c \geq 13$, im Widerspruch zu $a + b + c = 12$.

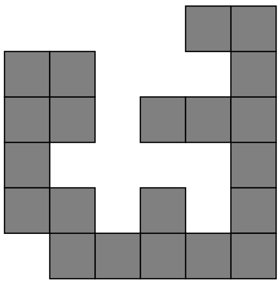
Für $b = 0$ folgt $c = 3$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 9$.
Für $b = 1$ folgt $c = 4$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 7$.
Für $b = 2$ folgt $c = 5$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 5$.
Für $b = 3$ folgt $c = 6$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 3$.
Für $b = 4$ folgt $c = 7$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 1$.

Damit sind alle gesuchten Zusammenstellungen gefunden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330632:

Es gibt viele Möglichkeiten. Ein Beispiel:



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330633:

Beim Angeben der Reihenfolge seien die Pfeile und die Angabe von (E) am Anfang und Ende weggelassen.

(a) Es gibt genau die 4 Möglichkeiten ABC, ACB, BCA, CBA.

(b) Für 4 Häuser A, B, C, D gibt es genau die 8 Möglichkeiten $ABCD$, $ABDC$, $ACDB$, $ADCB$, $BCDA$, $BDCA$, $CDBA$, $DCBA$.

(c) *1. Lösungsweg* (schrittweises Erhöhen der Häuserzahl):

Für 4 Häuser A, B, C, D gibt es zu jedem Weg, der für die Häuser B,C,D (etwa aus (a) durch Umbenennung) zu erhalten ist, genau 2 Wege, nämlich indem das Haus A entweder vor dem betreffenden

Weg für B, C, D beliefert wird oder erst anschließend an diesen Weg. So ergaben sich in (b) die $4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Wege.

Entsprechend kann man fortsetzen und findet für 5 Häuser $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ Wege, für 6 Häuser $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ Wege, ... , schließlich für 10 Häuser $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 == 512$ Wege.

2.Lösungsweg (Einführen unabhängiger Fallunterscheidungen):

Auf dem Hinweg zum letzten der 10 Häuser hat man bei jedem der vorangehenden 9 Häuser zu entscheiden, ob man dieses Haus sogleich auf dem Hinweg beliefert oder seine Belieferung erst für den Rückweg vorsieht. Da diese 9 Entscheidungen unabhängig voneinander sind, ergeben sie insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 == 512$ Möglichkeiten.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330634:

Da Dieters Aussagen falsch sind, gilt:

(1') Jedes Kind bekam eine der blauen Kugeln.

(2') Annette bekam entweder genau eine Kugel oder genau drei Kugeln.

(3') Bernd bekam keine verschiedenfarbigen Kugeln.

Nach (1') und weil nur drei blaue Kugeln vorhanden waren, bekam jedes Kind genau eine der blauen Kugeln. Nach (3') kann Bernd überhaupt keine weitere Kugel bekommen haben. Hätte Annette genau eine Kugel bekommen, so wären auf Christiane vier Kugeln entfallen. Da sie aber (wie jedes der Kinder) höchstens drei Kugeln bekam, scheidet dieser Fall aus; d.h. nach (2'): Annette muß genau drei Kugeln bekommen haben, also außer der einen blauen Kugel noch genau zwei gelbe Kugeln. Die restliche gelbe Kugel verblieb für Christiane.

Damit sind die Zahlen der Verteilung eindeutig bestimmt:

Annette bekam genau 1 blaue Kugel und genau 2 gelbe Kugeln.
Bernd bekam genau 1 blaue Kugel und keine gelbe Kugel.
Christiane bekam genau 1 blaue Kugel und genau 1 gelbe Kugel.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330635:

(a) Als Lösung genügt es, eine Eintragung der geforderten Art anzugeben, zum Beispiel Abb. a):

(b) Es gibt auch eine Eintragung der geforderten Art mit nur 6 verwendeten Buchstaben. Dies wird etwa durch Abb. b) bewiesen:

a	b	c	d
e	f	g	a
d	b	e	c
e	g	b	a

Abb. a)

a	b	a	c
d	c	e	a
f	d	b	f
b	e	d	a

Abb. b)

(c) Eine Eintragung der geforderten Art mit nur 5 verwendeten Buchstaben kann es nicht geben.

Beweis: Im 4×4 - Feld lassen sich in jeder der 4 Zeilen und in jeder der 4 Spalten 3 "Wörter" lesen, zusammen also $(4 + 4) \cdot 3 = 24$ "Wörter". Es sind aber nur 20 "Wörter" zugelassen, nämlich mit einem der 5 Buchstaben am Anfang und dann jeweils mit einem der 4 anderen Buchstaben am Ende. Bei jeder Eintragung, die nur zugelassene "Wörter" aufweist, muß es also auch mehrfach auftretende "Wörter" geben; daher ist sie nicht von der geforderten Art.

Hinweis: statt eines allgemein formulierten Beweises wie oben genügt es auch, die 20 "Wörter" so systematisch aufzuzählen, daß aus der Aufzählung die Vollständigkeit ersichtlich ist, z.B.: *ab*, *ac*, *ad*, *ae*; *ba*, *bc*, *bd*, *be*; *ca*, *cb*, *cd*, *ce*; *da*, *db*, *dc*, *de*; *ea*, *eb*, *ec*, *ed*.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330636:

a) Ist n = 2 vereinbart, so kann Anja den Gewinn erzwingen, indem sie zu Anfang eine der Ziffern 2, 4, 6, 8 auf das Feld ganz rechts (das Feld für die Einerziffer) bringt. Nach der Teilbarkeitsregel für 2 entsteht dann nämlich bei jeder Fortsetzung eine durch 2 teilbare Zahl. Ebenso kann Anja im Fall n = 5 den Gewinn erzwingen, indem sie zu Anfang die Ziffer 5 auf das Feld ganz rechts bringt.

b) Die Summe (1+8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5) der Zahlen auf allen Karten ist durch 9 teilbar. Da am Ende genau eine der Zahlen 1,2,3,4,5,6,7,8 übrigbleibt und diese Zahl nicht durch 9 teilbar ist, kann auch die Summe der ausgelegten Karten nicht durch 9 teilbar sein, gleichgültig, von wem und in welcher Reihenfolge sie ausgelegt wurden. Nach der Teilbarkeitsregel für 9 besagt das aber: Die ausgelegte siebenstellige Zahl ist nicht durch 9 teilbar; Bernd hat gewonnen.

c) Bernd kann den Gewinn erzwingen, indem er dafür sorgt, daß jedenfalls die Zahlen 3 und 6 sich unter den ausgelegten befinden (er hat ja - sogar dreimal - Gelegenheit, von ihm gewünschte Zahlen nötigenfalls selbst auszulegen). Damit erreicht er, ähnlich wie in b): Da die Summe der Zahlen auf allen Karten durch 3 teilbar ist und eine nicht durch 3 teilbare Zahl übrigbleiben muß, kann die Summe der ausgelegten Karten nicht durch 3 teilbar sein. Also ist die ausgelegte siebenstellige Zahl nicht durch 3 teilbar; folglich kann sie auch nicht durch 21 teilbar sein.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission