32. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Saison 1992/1993

Aufgaben und Lösungen

32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320731:

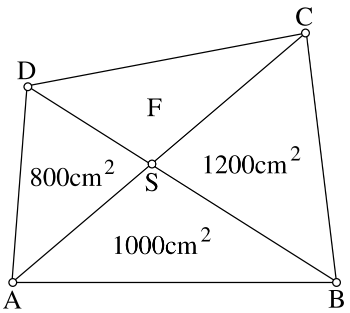
a) Vier rote Kugeln, zwei gelbe Kugeln und eine blaue Kugel sollen so auf zwei Kästen A und B verteilt werden, daß sich in A drei und in B vier Kugeln befinden.

Wieviele derartige Verteilungen gibt es insgesamt?

b) Jetzt werden gleichfarbige Kugeln durch eine zusätzliche Numerierung voneinander unterschieden. Die Verteilungen unterscheiden sich dann nicht nur darin, wieviele Kugeln der einzelnen Farben in den Kästen A und B sind, sondern auch, welche Nummern sie tragen.

Wieviele solcher Verteilungen gibt es insgesamt?

Aufgabe 320732:



Es sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in einem Punkt S schneiden. Ferner sei vorausgesetzt, daß die Dreiecke ABS, DAS und BCS die Flächeninhalte $1\,000\text{ cm}^2$, 800 cm^2 bzw. $1\,200\text{ cm}^2$ haben, so wie dies in der Abbildung angegeben ist.

Weise nach, daß durch diese Voraussetzung der Flächeninhalt F des Dreiecks CDS eindeutig bestimmt ist, und ermittle diesen Flächeninhalt!

Aufgabe 320733:

Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, sein Umkreismittelpunkt sei M. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt P derart, daß $\overline{BP} = 2\text{ cm}$ gilt. Auf der Verlängerung von BC über C hinaus liege ein Punkt Q mit $\overline{CQ} = 2\text{ cm}$, und auf der Verlängerung von CA über A hinaus liege ein Punkt R mit $\overline{AR} = 2\text{ cm}$.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen, unabhängig von der Seitenlänge des Dreiecks ABC, stets die beiden folgenden Aussagen a) und b) gelten!

a) Das Dreieck PQR ist gleichseitig.

b) Es ist $MP \cong MQ \cong MR$.

Aufgabe 320734:

Ermittle die Anzahl aller derjenigen sechsstelligen natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar sind und deren Quersumme durch 9 teilbar ist!

Aufgabe 320735:

Es sei ABC ein Dreieck, in dem der Innenwinkel $\sphericalangle ACB$ die Größe 32° hat. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D derart, daß $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt; auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt E derart, daß $\overline{BE} = \overline{BC}$ gilt.

Beweise, daß durch diese Voraussetzungen, unabhängig von den sonstigen Eigenschaften des Dreiecks ABC, die Größe des Winkels $\sphericalangle DCE$ eindeutig bestimmt ist; ermittle diese Winkelgröße!

Aufgabe 320736:

Über ein Schwimmbecken wurden folgende Angaben gemacht:

Das Becken kann durch zwei getrennte Wasserleitungen gefüllt werden. Aus der zweiten Leitung strömen in jeder Minute 50 Kubikmeter mehr heraus als aus der ersten. Um das Becken vollständig zu füllen, werden 48 Minuten gebraucht, wenn beide Leitungen gleichzeitig geöffnet sind; dagegen 2 Stunden, wenn nur die erste Leitung geöffnet ist.

Untersuche, ob das Volumen des Beckens durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Volumen!

32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 320731:

Jede mögliche Verteilung ist bereits durch die Anzahlen der in A befindlichen Kugeln eindeutig festgelegt.

a) Für diese Anzahlen gibt es genau die Möglichkeiten der folgenden Tabelle

Verteilung Nr.	1	2	3	4	5	6
rot	0	1	1	2	2	3
gelb	2	1	2	0	1	0
blau	1	1	0	1	0	0

Das sind insgesamt 6 Verteilungen.

b) Jede nun zu ermittelnde Verteilung kann erhalten werden, indem man jeweils bei einer Verteilung aus a) feststellt, welche Nummern die Kugeln tragen können:

Verteilung Nr.1 führt so zu genau 1 Verteilung,
da in A bereits die einzige blaue Kugel und alle gelben Kugeln liegen müssen.

Bei Verteilung Nr.2 kann jede der vier roten und jede der zwei gelben Kugeln in A liegen. Das führt zu genau $4 \cdot 2 =$ 8 Verteilungen.

Bei Verteilung Nr.3 müssen in A alle gelben Kugeln sein, jede der vier roten Kugeln kann in A liegen, das ergibt genau 4 Verteilungen.

Bei Verteilung Nr.4 liegt in A die einzige blaue Kugel, für die Nummern der roten Kugeln gibt es genau die Möglichkeiten $(1;2)$, $(1;3)$, $(1;4)$, $(2;3)$, $(2;4)$, $(3;4)$ 6 Verteilungen.

Verteilung Nr.5: In A kann jede dieser sechs Zusammenstellungen roter Kugeln und jede der zwei gelben Kugeln liegen, das führt auf genau $6 \cdot 2 =$ 12 Verteilungen.

Verteilung Nr.6: Für die Kugeln in A ist genau eine der vier roten Kugeln wegzulassen, somit gibt es hierfür genau 4 Verteilungen.

Das sind insgesamt $1 + 8 + 4 + 6 + 12 + 4 = 35$ Verteilungen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

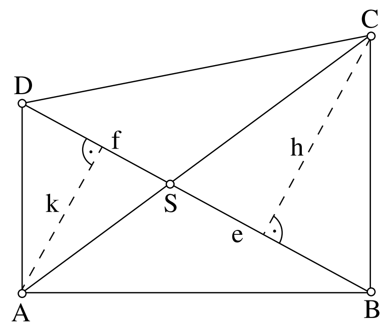
Lösung 320732:

In den Dreiecken BCS bzw. DAS seien e bzw. f die Längen der Seiten BS bzw. DS, und h bzw. k seien die Längen der auf diesen Seiten senkrechten Höhen.

Dann sind k und h auch in den Dreiecken ABS bzw. CDS die Längen der zu den Seiten BS bzw. DS senkrechten Höhen.

Also sind die vorausgesetzten Flächeninhalte bzw. der gesuchte Flacheninhalt

$$\frac{e\cdot k}{2} = 1\,000\text{ cm}^2, \qquad \frac{f\cdot k}{2} = 800\text{ cm}^2,$$
$$\frac{e\cdot h}{2} = 1\,200\text{ cm}^2, \qquad \frac{f\cdot h}{2} = F.$$



Daraus folgt

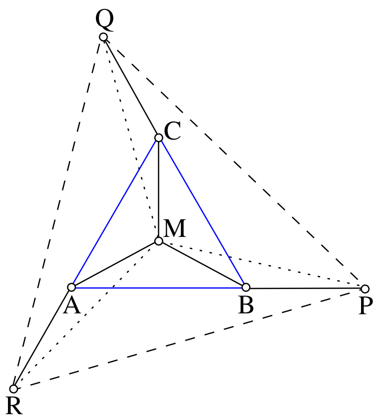
$$f : e = 800 : 1\,000 = 4 : 5,$$
$$f = \frac{4e}{5};$$

d.h., durch die Voraussetzungen ist eindeutig bestimmt

$$F = \frac{4e\cdot h}{5\cdot 2} = \frac{4}{5}\cdot 1\,200\text{ cm}^2 = 960\text{ cm}^2.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 320733:



a) Aus der Lage von P, Q, R auf den genannten Verlängerungen und aus den Voraussetzungen

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}, \tag{1}$$
$$\overline{BP} = \overline{CQ} = \overline{AR} \tag{2}$$

folgt auch

$$\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR}. \tag{3}$$

Die Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck ABC betragen 60°, für ihre Nebenwinkel gilt daher

$$\overline{\sphericalangle PAR} = \overline{\sphericalangle QBP} = \overline{\sphericalangle RCQ} = 120°. \tag{4}$$

Aus (2), (3), (4) folgt nach dem Kongruenzsatz sws

$$\Delta APR \cong \Delta BQP \cong= \Delta CRQ$$

und damit $\overline{RP} = \overline{PQ} = \overline{QR}$. $\square$

b) Im gleichseitigen Dreieck ABC ist der Umkreismittelpunkt M zugleich Inkreismittelpunkt, d.h., AM, BM und CM halbieren die Innenwinkel des Dreiecks[1)], also gilt

$$\overline{\sphericalangle MAP} = \overline{\sphericalangle MBQ} = \overline{\sphericalangle MCR} = 30°.$$

Daraus und aus (4) ergibt sich[2)]

$$\overline{\sphericalangle MAR} = \overline{\sphericalangle MBP} = \overline{\sphericalangle MCQ} = 150°. \tag{5}$$

Aus (2),(5) und $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ (Radien des Umkreises) folgt nach dem Kongruenzsatz sws

$$\Delta MAR \cong \Delta MBP \cong \Delta MCQ$$

und damit die Behauptung $\overline{MR} = \overline{MP} = \overline{MQ}$. $\square$

Zweiter Lösungsweg: Durch eine Drehung der Ebene um den Punkt M als Drehzentrum kann A in B und zugleich B in C sowie C in A übergeführt werden, da MA, MB, MC als Radien des Umkreises einander gleichlang sind und da sie den Vollwinkel um M in drei einander gleichgroße Teilwinkel zerlegen [Kongruenzsatz sss, mit diesen Radien und (1) auf die Dreiecke ABM, BCM, CAM angewandt].

Da bei Drehungen die Eigenschaften der Lage von P, Q, R auf den Verlängerungen und der dabei vorausgesetzten Abstände erhalten bleiben, geht bei dieser Drehung P in Q, Q in R und R in P über. Damit erbringen die weiteren - ebenfalls als bekannter Sachverhalt heranzuziehenden - Drehungseigenschaften $\overline{MP} = \overline{MQ} = \overline{MR}$ [Gleichheit jeweils des Abstandes Drehzentrum-Urbildpunkt mit dem Abstand Drehzentrum-Bildpunkt] sowie $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP}$ [Gleichheit der Abstände Urbildpunkt-Bildpunkt jeweils für alle Urbildpunkte einheitlicher Entfernung zum Drehzentrum] die Behauptungen b) bzw. a).

[1] Dies kann auch mit Kongruenzsatz sss aus den Voraussetzungen $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$, $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ erhalten werden.

[2] Hier wird verwendet, daß M auf derselben Seite der Geraden durch A, B liegt wie C, also nicht auf derselben Seite wie R (da nach Voraussetzung C und R auf verschiedenen Seiten dieser Geraden liegen). Die Angabe solcher Lagebetrachtungen wird nicht vom Schüler verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 320734:

Eine natürliche Zahl n hat genau dann eine durch 9 teilbare Quersumme, wenn n selbst durch 9 teilbar ist. Ferner ist n wegen der Teilerfremdheit von 5 und 9 genau dann durch 5 und 9 teilbar, wenn n durch 45 teilbar, d.h. mit einer natürlichen Zahl k von der Form $n = 45 \cdot k$ ist.

Wegen	$45 - 2\,222 = 99\,990,$	$45 - 2\,223 = 100\,035$
sowie	$45 - 22\,222 = 999\,990,$	$45 - 22\,223 = 1\,000\,035$

sind die Zahlen $45 \cdot k$ mit natürlichen k genau für $k = 2\,223, ..., 22\,222$ sechsstellig. Da dies $22\,222 - 2\,222 = 20\,000$ Werte k sind, ist damit die gesuchte Anzahl 20 000 ermittelt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

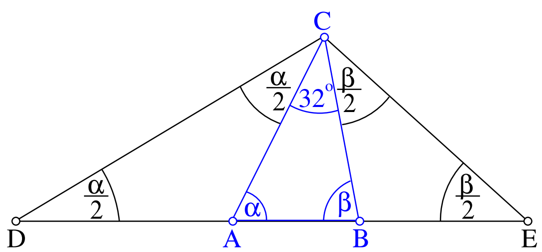
Lösung 320735:

Im Dreieck ABC seien α bzw. β die Größen der Innenwinkel bei A bzw. B. Das Dreieck ACD ist mit $\overline{AD} = \overline{AC}$ gleichschenklig, nach dem Basiswinkelsatz und dem Außenwinkelsatz gilt daher $\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle ADC} = \frac{\alpha}{2}$.

Ebenso folgt $\overline{\sphericalangle BCE} = \overline{\sphericalangle BEC} = \frac{\beta}{2}$.

Folglich ist

$$\overline{\sphericalangle DCE} = \overline{\sphericalangle ACB} + \overline{\sphericalangle ACD} + \overline{\sphericalangle BCE} = 32° + \frac{\alpha+\beta}{2}.$$



Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC ist aber $\alpha + \beta = 180° - 32° = 148°$. Damit ist gezeigt, daß durch die Voraussetzungen die Winkelgröße $\overline{\sphericalangle DCE} = 32° + \frac{148°}{2} = 32° + 74° = 106°$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 320736:

Wenn das Volumen des Beckens x Kubikmeter beträgt, so folgt aus den Angaben: In jeder Minute strömen aus der geöffneten ersten Leitung $\frac{x}{120}$ Kubikmeter, aus der zweiten $(\frac{x}{120} + 50)$ Kubikmeter. Das Volumen des Beckens, das durch beide Leitungen in 48 Minuten gefüllt wird, beträgt daher

$$48 \cdot \left(\frac{x}{120} + \left(\frac{x}{120} + 50\right)\right)$$

Kubikmeter. Also muß die Gleichung

$$48 \cdot \left(2 \cdot \frac{x}{120} + 50\right) = x \tag{1}$$

gelten. Aus (1) folgt durch Multiplikation mit 5

$$\begin{aligned} \frac{48 \cdot 10}{120} + 48 \cdot 250 &= 5x \\ 4x + 12\,000 &= 5x, \\ x &= 12\,000. \end{aligned}$$

Somit ist durch die Angaben eindeutig bestimmt: Das Volumen des Beckens beträgt 12 000 Kubikmeter.

Bemerkungen zur Korrektur:

1. Da der Aufgabentext nur die Eindeutigkeit, aber nicht die Existenz eines Volumens (Verträglichkeit der gegebenen Angaben miteinander und mit einer Volumenangabe) nachzuweisen verlangt, erfordert er keine Probe. Sicherheitshalber mag sie zweckmäßig sein, in der (Teil-) Punktanforderung hat sie aber nicht aufzutreten.

   Sie kann als Probe zur Gleichung (1) oder anschaulich-inhaltlich etwa so verlaufen: Durch die erste Leitung strömen je Minute $12\,000 : 120\,\mathrm{m}^3 = 100\,\mathrm{m}^3$, durch die zweite also $(100 + 50)\mathrm{m}^3 = 150\,\mathrm{m}^3$; und daher füllen in der Tat beide Leitungen in 48 Minuten das Volumen $48 \cdot (100+150)\mathrm{m}^3 = 12\,000\,\mathrm{m}^3$.

   Zur Lösung würde es nicht ausreichen, das Volumen $12\,000\,\mathrm{m}^3$ allein durch Bestätigung von Übereinstimmungen der eben ausgeführten Art als erwiesen zu betrachten; denn auf diesem Wege ergibt sich nicht die geforderte Aussage zur Eindeutigkeit.

2. Der hier vermittels Gleichungslösen beschriebene Lösungsweg kann auch insgesamt mehr in Gestalt anschaulich-inhaltlicher Schlüsse dargestellt werden. Die eben genannte Anforderung an das logische Vorgehen (Schluß von den gegebenen Angaben auf das Volumen, nicht umgekehrt) gilt auch zu einer solchen Darstellung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission