31. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Saison 1991/1992

Aufgaben und Lösungen

31. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310721:

Matthias, Thomas, Frank und Sven haben im Hof bei den Wohnhäusern Fußball gespielt. Eine Fensterscheibe ging zu Bruch; genau einer der vier Jungen hat sie mit seinem mißglückten Torschuß zerschlagen. Sie machen nun folgende Aussagen:

Matthias: Es war Thomas oder Frank, der die Scheibe zerschlug.

Thomas: Ich war es nicht.

Frank: Ich auch nicht.

Sven: Frank hat es getan.

Rolf, der alles beobachtet hat, stellt fest, daß mindestens drei dieser vier Aussagen wahr sind.

Untersuche, ob durch Rolfs Feststellung, wenn sie wahr ist, eindeutig bestimmt ist, wer die Scheibe zerschlug! Wenn das der Fall ist, ermittle diesen Täter!

Aufgabe 310722:

Susann will die Summe s aller derjenigen vierstelligen natürlich Zahlen berechnen, die durch 4 teilbar sind. Tamara ermittelt die Summe t aller derjenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind.

a) Sind s und t einander gleich oder, wenn nicht, welche der beiden Zahlen ist die größere?

b) Welchen Betrag hat die Differenz zwischen s und t?

Begründe deine Antworten!

Aufgabe 310723:

a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem die Seitenlängen $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm betragen und der Winkel $\sphericalangle BAD$ die Größe $\alpha = 50°$ hat!

Errichte über den Seiten AD und DC die Quadrate $ADPQ$ und $DCRS$ so, daß diese Quadratflächen vollständig außerhalb der Parallelogrammfläche liegen!

b) Beweise, daß für jedes Parallelogramm $ABCD$, bei dem $\sphericalangle BAD$ kleiner als $90°$ ist, nach dem Konstruieren solcher Quadrate die Strecken BQ und BR einander gleichlang sind und aufeinander senkrecht stehen!

Aufgabe 310724:

a) Konstruiere ein Fünfeck $ABCDE$, in dem die Seitenlängen

$$\overline{AB} = 50\,\text{mm}, \qquad \overline{BC} = 45\,\text{mm}, \qquad \overline{AE} = 54\,\text{mm}$$

betragen und die Innenwinkel $\sphericalangle BAE$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle AED$ in dieser Reihenfolge die Größen $\alpha = 100°$, $\beta = 110°$, $\gamma = 106°$, $\epsilon = 114°$ haben!

b) Konstruiere nun zwei Punkte F und G, die so auf der Geraden durch A und B liegen, daß das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat!

Beschreibe deine Konstruktion der Punkte F und G!

Beweise, daß von den nach deiner Beschreibung konstruierten Punkten die geforderten Bedingungen erfüllt werden!

31. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 310721:

In der folgenden Tabelle wird für jede der vier Möglichkeiten des Täters angegeben, welche der vier Aussagen wahr (w) und welche falsch (f) sind:

Täter	Wahrheitswert der Aussage von Mattias	Thomas	Frank	Sven
Matthias	f	w	w	f
Thomas	w	f	w	f
Frank	w	w	f	w
Sven	f	w	w	f

Nur dann, wenn Frank der Täter war, sind mindestens drei der Aussagen wahr. Also ist durch diese Voraussetzung eindeutig bestimmt, daß nur Frank die Scheibe zerschlagen haben kann.

Eine andere Lösungsmöglichkeit besteht darin, die folgenden vier Annahmen als widerspruchsvoll nachzuweisen:

(1)	Alle vier Aussagen sind wahr.
(2)/(3)/(4)	Genau Matthias'/Thomas'/Svens Aussage ist falsch.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310722:

s ist die Summe der Zahlen 1 000, 1 004, ..., 9 996; t ist die Summe der Zahlen 1 002, 1 006, ..., 9 998.

a) Aus jedem Summanden in s entsteht durch Vergrößerung um 2 ein Summand in t, und dabei entsteht jeder Summand in t genau einmal. Also enthalten beide Summen gleich viele Summanden. Ferner ist jeder Summand in t größer als der entsprechende Summand in s. Daher ist t größer als s.

b) Der Unterschied zwischen dem ersten und letzten Summanden beträgt in beiden Summen 8 996, die Summanden folgen im Abstand 4 aufeinander. Die Anzahl der Summanden beträgt (in jeder der beiden Summen) daher $8\,996 : 4 + 1 = 2\,250$. Hieraus und weil jeder Summand in t um 2 größer als der entsprechende Summand in s ist, folgt: Die Differenz zwischen s und t hat den Betrag $2\,250 \cdot 2 = 4\,500$.

Bemerkungen:

1. Die Ermittlung der Summandenanzahl kann z.B. auch so dargestellt werden, daß man die Summanden in der Form

$$996 + 1 \cdot 4, \qquad 996 + 2 \cdot 4, \qquad ..., \qquad 996 + 2\,250 \cdot 4$$

schreibt und sie dann mit Hilfe der bei 4 stehenden Faktoren 1, 2, ..., 2 250 abgezählt denkt.

2. Beginnt man mit dem Nachweis zu b), so erhält man dabei auch die für a) zu beweisende Aussage $t > s$, und auf eine gesonderte Darstellung von für b) noch nicht ausreichenden Argumenten zu a) kann verzichtet werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310723:

a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Zeichnung.

b) Nach Voraussetzung gilt

$\overline{AB} = \overline{DC}$ (Gegenseiten im Parallelogramm $ABCD$)

$= \overline{CR}$ (Seiten im Quadrat $DCRS$) (1)

und $\overline{AQ} = \overline{DA}$ (Seiten im Quadrat $ADPQ$)

$= \overline{CB}$ (Gegenseiten im Parallelogramm $ABCD$). (2)

Für $\overline{\sphericalangle BAD} = \alpha < 90°$ gelten die Gleichungen

$\overline{\sphericalangle ABC} = 180° - \alpha$ (3)

und $\overline{\sphericalangle BCD} = \alpha$ (Winkel im Parallelogramm),

wegen $\overline{\sphericalangle QAD} = \overline{\sphericalangle DCR} = 90°$ (Winkel in Quadraten)

also $\overline{\sphericalangle QAB} = \overline{\sphericalangle BCR} = 90° + \alpha$. (4)

Aus (1), (2), (4) folgt nach dem Kongruenzsatz sws

$\overline{\sphericalangle ABQ} \cong \overline{\sphericalangle CRB}$,

also $\overline{BQ} = \overline{RB}$, (5)

$\overline{\sphericalangle ABQ} = \overline{\sphericalangle CRB} = \phi$, (6)

$\overline{\sphericalangle AQB} = \overline{\sphericalangle CBR} = \psi$. (7)

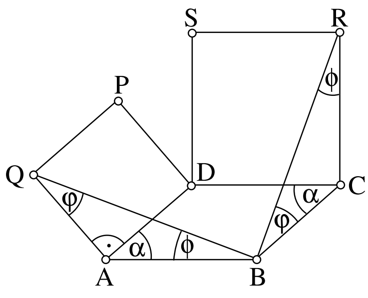
Nach (4), (6), (7) folgt aus dem Innenwinkelsatz

$\alpha + \phi + \psi = 90°$; (8)

aus (3), (6), (7) und (8) folgt

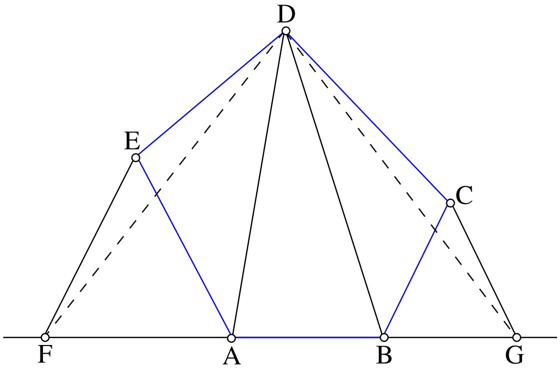
$\overline{\sphericalangle QBR} = 180° - \alpha - \phi - \psi = 90$. (9)

Mit dem Nachweis von (5) und (9) ist der verlangte Beweis geführt.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310724:

a) 

Die Abbildung enthält ein zu konstruierendes Fünfeck $ABCDE$.

b) Die Abbildung enthält auch eine Konstruktion zweier Punkte F, G.

Beschreibung dieser Konstruktion:

(1) Man konstruiert die Parallele durch E zu AD; sie schneidet die Gerade durch A und B in F.

(2) Man konstruiert die Parallele durch C zu BD; sie schneidet die Gerade durch A und B in G.

Beweis, daß für die so auf der Geraden durch A und B konstruierten Punkte F, G das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat:

Nach (1) gilt $EF \parallel AD$. Daher haben in den Dreiecken ADE und ADF die zu AD senkrechten Höhen dieselbe Länge. Also haben diese Dreiecke einander gleichen Flächeninhalt. Ebenso folgt aus (2), daß die Dreiecke BDC und BDG einander gleichen Flächeninhalt haben. Damit ergibt sich[1)]

$$\begin{aligned} A_{(FGD)} &= A_{(ABD)} + A_{(ADF)} + A_{(BDG)} \\ &= A_{(ABD)} + A_{(ADE)} + A_{(BDC)} = A_{(ABCDE)} \qquad \square \end{aligned}$$

Bemerkung: Die geforderten Bedingungen werden auch von jeder anderen auf der Geraden durch A und B liegenden, zur oben konstruierten Strecke FG gleichlangen Strecke erfüllt.

[1)] Ist P ein Polygon, so bezeichne $A_{(P)}$ seinen Flächeninhalt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission