31. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Saison 1991/1992

Aufgaben und Lösungen

31. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310521:

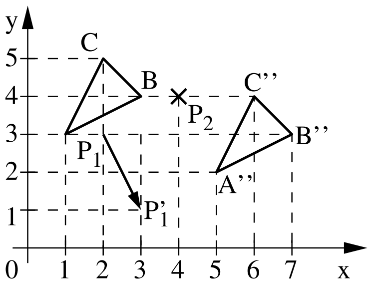
Blaue, gelbe und rote Würfel sollen in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch niemals die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln wiederholen.

a) Nenne ein Beispiel für eine Reihe, die diese Bedingungen erfüllt und nicht mehr durch Anlegen eines weiteren Würfels verlängert werden kann!

b) Es gibt insgesamt vier solche Reihen; sie sind nicht alle gleichlang. Nenne alle diejenigen, die möglichst große Länge haben!

Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 310522:



In der Abbildung sind gegeben: Zwei Dreiecke ABC und $A''B''C''$, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_1'}$ sowie ein Punkt P_2.

a) Konstruiere das Bild $A'B'C'$ des Dreiecks ABC bei der Verschiebung mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_1'}$!

b) Konstruiere den bei P_2 beginnenden Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_2P_2'}$ derjenigen Verschiebung, bei der $A'B'C'$ das Bild $A''B''C''$ hat!

Eine Beschreibung der Konstruktionen wird nicht verlangt.

Aufgabe 310523:

Nach einem 100 m-Lauf, an dem 5 Sportler teilnahmen, fragt jemand, in welcher Reihenfolge sie ins Ziel kamen. Gert erinnert sich:

(1) Achim kam eher ins Ziel als Christian.

(2) Zeitgleich mit Emil kam kein anderer ins Ziel, und zwar war Emil der Dritte oder der Vierte.

(3) Frank kam nicht eher ins Ziel als Bernd.

(4) Frank kam jedoch eher ins Ziel als Achim.

Nenne alle hiernach bestehenden Möglichkeiten der Reihenfolge! Zeige, daß nur bei den von dir genannten Möglichkeiten Gerts Aussagen wahr sind!

Hinweis: Beachte, daß es für die gesuchten Möglichkeiten der Reihenfolge einen Unterschied bedeutet, ob zwei Sportler gleichzeitig ins Ziel kamen oder nicht!

Aufgabe 310524:

Klaus möchte an die Ecken eines Achtecks die Zahlen 1, 2, ... , 8 schreiben, an jede Ecke eine Zahl. Er will dann für jede Ecke die Summe aus den drei Zahlen bilden, die an dieser Ecke und an ihren beiden Nachbarecken stehen. Er möchte erreichen, daß jede der so gebildeten acht Summen

a) größer als 11 ist,

b) größer als 13 ist.

Gib für jedes der beiden Vorhaben a), b) an, ob es sich erfüllen läßt! Ist es erfüllbar, so belege dies durch ein Beispiel mit der Angabe der acht Summen! Ist das betreffende Vorhaben a) bzw. b) nicht erfüllbar, so begründe, warum nicht!

31. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 310521:

Alle Reihen, von denen zu a) eine zu nennen ist, sind:

$$bgbrb,\ bgbrgrb,\ bgrbrgb,\ bgrgbrb.$$

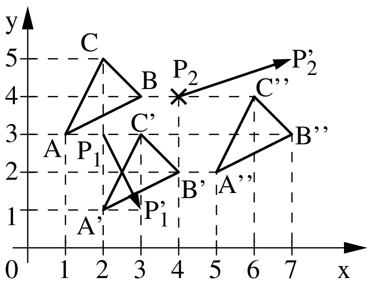
Möglichst große Länge haben, also in b) zu nennen sind die drei letzten.

Bemerkung: Zum Auffinden der Reihen kann man, ausgehend von dem Beginn bg, an eine jeweils schon erhaltene Teilreihe alle möglichen Fälle der Fortsetzung aufsuchen. Dabei gibt es stets genau die folgenden Fälle: Kommt in der betreffenden Teilreihe die letzte Farbe genau dieses eine Mal vor, so stehen die beiden anderen Farben für zwei verschiedene Fortsetzungsmöglichkeiten zur Verfügung. Kommt die letzte Farbe schon insgesamt zweimal vor, so gibt es nur noch eine Fortsetzung; kommt die letzte Farbe dreimal vor, so kann die Reihe nicht mehr fortgesetzt werden.

Ausführungen dieser Art werden nicht vom Schüler verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310522:



Die Abbildung zeigt eine verlangte Konstruktion.

(Die zu konstruierenden Punkte A', B', C', P_2' sind eindeutig bestimmt, für die Wahl von Hilfslinien gibt es verschiedene Möglichkeiten. Das Konstruieren einer Parallelen braucht nicht mit Zirkel und Lineal ausgeführt zu sein; d.h., es braucht hierzu - bei Konstruktion mit Lineal und Zeichendreieck - keine weitere Hilfslinie aufzutreten.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310523:

Mit A, B, C, E, F seien die Laufzeiten von Achim, Bernd, Christian, Emil bzw. Frank bezeichnet. Die Aussagen (4) und (1) können nur bei der Reihenfolge

$$F < A < C$$

von Achim, Christian und Frank wahr sein. Nach (3) gibt es für die Reihenfolge von Bernd und Frank nur die beiden Möglichkeiten $B < F$ bzw. $B = F$, für Achim, Bernd, Christian und Frank also nur

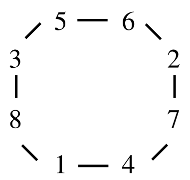
$$B < F < A < C, \quad (5)$$
$$B = F < A < C. \quad (6)$$

Sowohl zu (5) als auch zu (6) gibt es nur zwei Möglichkeiten, auch (2) zu erfüllen: Entweder ist E an die dritte Stelle zwischen F und A einzufügen oder an die vierte Stelle zwischen A und C. Also gibt es dafür, daß Gerts Aussagen wahr sind, nur die vier Möglichkeiten

$$B < F < E < A < C,$$
$$B < F < A < E < C,$$
$$B = F < E < A < C,$$
$$B = F < A < E < C.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310524:

a) 

Das Vorhaben ist erfüllbar. Ein mögliches Beispiel zeigt die Abbildung; die acht Summen sind

$8+1+4=13,\quad 1+4+7=12,\quad 4+7+2=13,$
$7+2+6=15,\quad 2+6+5=13,\quad 6+5+3=14,$
$5+3+8=16,\quad 3+8+1=12.$

b) *1. Lösungsweg:* Bei jeder Verteilung der Zahlen 1, 2, ..., 8 auf die Ecken gibt es von den drei Zahlen 1, 2, 3 mindestens zwei, zwischen denen keine oder nur eine Ecke liegt (denn lägen sowohl zwischen 1 und 2 als auch zwischen 1 und 3 als auch zwischen 2 und 3 jeweils mindestens zwei Ecken, so gäbe es insgesamt mindestens $3 + 3 \cdot 2 = 9$ Ecken). Bei jeder Verteilung hat daher eine der acht zu bildenden Summen zwei Summanden aus den drei Zahlen 1, 2, 3, der dritte Summand ist nicht größer als 8; diese Summe ist also nicht größer als $2 + 3 + 8 = 13$.

Damit ist bewiesen: Es ist nicht möglich, die Zahlen so zu verteilen, daß jede der zu bildenden Summen größer als 13 ist.

2. Lösungsweg: Für jede Verteilung gilt: Addiert man die acht zu bildenden Summen, so wird dabei jede der Zahlen 1, 2, ..., 8 genau dreimal erfaßt (nämlich einmal als Zahl an einer Ecke selbst, einmal als Zahl an einer linken Nachbarecke und einmal als Zahl an einer rechten Nachbarecke). Dabei entsteht also stets das Ergebnis $3\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8) = 3\cdot 36 = 108$. Dagegen müßte dieses Ergebnis bei einer Verteilung, bei der jede der acht Summen größer als 13 wäre, mindestens $8 \cdot 14 = 112$ betragen. Dieser Widerspruch zeigt, daß eine solche Verteilung nicht möglich ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission