30. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Saison 1990/1991

Aufgaben und Lösungen

30. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300721:

Über die Schüler einer Schulklasse werden folgende Aussagen gemacht:

(1) Genau 10 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft an.

(2) Genau 8 Schüler gehören einer Sportgemeinschaft an.

(3) Genau 5 Schüler gehören weder einer Arbeitsgemeinschaft noch einer Sportgemeinschaft an.

Gib eine

a) möglichst kleine,

b) möglichst große

Schülerzahl der Schulklasse an, bei der die drei Aussagen wahr sein können! Begründe deine Angaben!

Aufgabe 300722:

a) Ermittle unter den natürlichen Zahlen a, die größer als 100 und kleiner als 1 000 sind, alle diejenigen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

   (1) a hat genau zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.

   (2) a läßt sowohl bei Division durch 11 den Rest 2 als auch bei Division durch 13 den Rest 2.

   (3) a ist eine ungerade Zahl.

b) Stelle für jede der drei Bedingungen (1), (2), (3) fest, ob sich am Ergebnis der Aufgabe (a) etwas ändert, wenn man diese Bedingung wegläßt und nur jeweils die beiden anderen Bedingungen fordert!

Aufgabe 300723:

a) Ein an der gesamten Oberfläche gefärbter Holzwürfel soll in gleich große Teilwürfel zersägt werden. Dabei wird gefordert, daß mindestens 40 dieser Teilwürfel völlig ungefärbt sind.

   Ermittle die kleinstmögliche Anzahl der Teilwürfel, in die der gesamte Holzwürfel zu zerlegen ist, damit diese Forderung erfüllt wird!

b) Aus 40 so erhaltenen ungefärbten Teilwürfeln soll ein Quader (ohne freibleibende Hohlräume im Innern) zusammengesetzt werden; dabei soll jeder dieser 40 Teilwürfel verwendet werden.

   Ermittle das Volumen dieses Quaders, wenn bekannt ist, daß der ursprüngliche Holzwürfel ein Volumen von 27 dm^3 hatte!

Aufgabe 300724:

In einem Dreieck ABC seien BD bzw. CE die Winkelhalbierenden der Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle ACB$, und S sei der Schnittpunkt von BD mit CE.

a) Beweise: Wird ferner vorausgesetzt, daß der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe $\alpha = 60°$ hat, so folgt, daß dann auch stets der Winkel $\sphericalangle BSE$ die Größe $60°$ hat!

b) Ermittle eine Formel, mit der sich zu beliebig vorgegebener Größe α des Innenwinkels $\sphericalangle BAC$ die Größe des Winkels $\sphericalangle BSE$ ergibt!

30. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 300721:

a) Um eine möglichst kleine Anzahl zu erhalten, wählt man die Möglichkeit, daß auf möglichst viele Schüler zwei der drei Aussagen zutreffen.

   Das bedeutet: Genau 8 Schüler gehören sowohl einer Arbeitsgemeinschaft als auch einer Sportgemeinschaft an. Dann folgt: Genau 2 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft, aber nicht einer Sportgemeinschaft an.

   Zusammen mit den in (3) genannten 5 Schülern ergibt das $8 + 2 + 5 = 15$ Schüler.

b) Um eine möglichst große Anzahl zu erhalten, wählt man die Möglichkeit, daß auf (möglichst wenige, also) keinen der Schüler zwei der drei Aussagen zutreffen. Das ergibt mit den in (1), (2) und (3) genannten Schülern insgesamt $10 + 8 + 5 = 23$ Schüler.

2. Lösungsweg:

Bezeichnet

X	die Schülerzahl der Klasse,
A	die Anzahl der Schüler, die einer Arbeitsgemeinschaft, aber nicht einer Sportgemeinschaft angehören,
S	die Anzahl der Schüler, die einer Sportgemeinschaft, aber nicht einer Arbeitsgemeinschaft angehören,
B	die Anzahl der Schüler, die beiden angehören,

so sind (1), (2), (3) äquivalent mit

$$B + A = 10, \tag{4}$$

$$B + S = 8, \tag{5}$$

$$B + A + S + 5 = X. \tag{6}$$

Aus (6) und (4) folgt $10 + S + 5 = X$; wegen $S \geq 0$ folgt $X \geq 10 + 0 + 5 = 15$.

Da (4), (5), (6) durch $B = 8$, $A = 2$, $S = 0$ mit $X = 15$ erfüllt werden, ist $X = 15$ der in a) gesuchte kleinstmögliche Wert X.

Aus (6) und (5) folgt $8 + A + 5 = X$ wegen $B \geq 0$ und (4) folgt $A \leq 10$ und damit $X \leq 8 + 10 + 5 = 23$. Da (4), (5), (6) durch $B = 0$, $A = 10$, $S = 8$ mit $X = 23$ erfüllt werden, ist $X = 23$ der in b) gesuchte größtmögliche Wert X.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300722:

a) Für jede natürliche Zahl a, die die erste Teilaussage in (2) erfüllt, ist $a-2$ ein Vielfaches von 11, also eine der Zahlen $0, 11, 2\cdot 11, 3\cdot 11, ...$

Erfüllt a auch die zweite Teilaussage in (2), so ist $a-2$ auch ein Vielfaches von 13, also verbleiben für $a-2^{*)}$ nur die Zahlen $0, 13\cdot 11, 2\cdot 13\cdot 11, 3\cdot 13\cdot 11, ...$

Erfüllt a auch (3), so ist $a-2$ eine ungerade Zahl, also verbleiben für $a-2$ nur die Zahlen $143, 3\cdot 143 = 429, 5\cdot 153 = 715, 7\cdot 143 = 1\,001, ...$

Von den natürlichen Zahlen a mit $100 < a < 1\,000$ erfüllen also nur die Zahlen $143+2 = 145, 429+2 = 431, 715+2 = 717$ die Bedingungen (2) und (3).

Wegen $145 = 5\cdot 29$ hat 145 mehr als zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler, nämlich $1, 5, 29, 145$. Entsprechendes gilt wegen $717 = 3\cdot 239$ auch für 717. Dagegen ist 431 eine Primzahl. (Dies folgt daraus, daß 431 durch keine der Primzahlen teilbar ist, deren Quadrat kleiner oder gleich 431 ist, nämlich 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.) Also hat 431 genau die zwei natürlichen Zahlen 1 und 431 als Teiler. Somit werden unter den natürlichen Zahlen a mit $100 < a < 1\,000$ die Bedingungen (1), (2), (3) genau von der Zahl $a = 431$ erfüllt.

b) Wie eben gezeigt, werden (2) und (3) außer von 431 beispielsweise auch von 145 erfüllt. Ferner werden (1) und (3) beispielsweise auch von der ungeraden Primzahl 101 erfüllt. Läßt man also eine der Bedingungen (1) oder (2) weg, so ändert sich das Ergebnis von a).

Dagegen kann man (3) weglassen, ohne am Ergebnis etwas zu ändern; denn jede natürliche Zahl, die (1) erfüllt, ist eine Primzahl, und wenn sie größer als 100 ist, scheidet die einzige gerade Primzahl 2 aus, d.h.: Für Zahlen a, die größer als 100 (und kleiner als $1\,000$) sind, folgt (3) bereits aus (1).

$^{*)}$ Hier kann als bekannter Sachverhalt verwendet werden: Ist $a-2$ durch 11 und durch 13 teilbar, so auch durch das kleinste gemeinsame Vielfache von 11 und 13, also durch $11\cdot 13$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300723:

a) Einen Würfel kann man in gleichgroße Teilwürfel zerlegen, indem man eine natürliche Zahl $n > 1$ wählt, drei von einer Ecke ausgehende Kanten in je n gleiche Teile teilt und durch die Teilpunkte Ebenen legt, die zu den Begrenzungsflächen des Würfels parallel verlaufen.

Der Würfel wird dadurch in n Schichten zerlegt, jede Schicht in $n\cdot n$ Teilwürfel. Die Anzahl A der entstehenden Teilwürfel beträgt also $A = n^3$ (siehe die folgende Tabelle).

n	2	3	4	5	6	...
A	8	27	64	125	216	...

Die völlig ungefärbten Teilwürfel bilden einen im Innern des gesamten Holzwürfels enthaltenen kleineren Würfel. Damit die Anzahl seiner Teilwürfel $A = 40$ ist, muß für ihn $n \geq 4$ sein, wie die Tabelle zeigt. Für den gesamten Holzwürfel ist dieses n durch $n+2$ zu ersetzen.

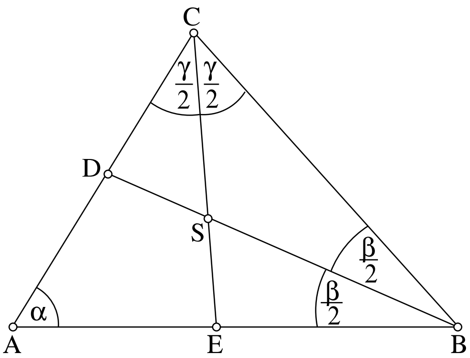
Die kleinstmögliche Anzahl von Teilwürfeln, mit der die gestellte Forderung erfüllt wird, ist also die zu $n = 6$ gehörende Anzahl $A = 216$.

b) Wegen $3^3 = 27$ beträgt die Kantenlänge des ursprünglichen Holzwürfels 3 dm. Aus a) folgt nun, daß die Kantenlänge eines der 216 Teilwürfel $3\,\text{dm} : 6 = 0,5\,\text{dm}$ beträgt. Der Quader besteht aus 40 Würfeln dieser Kantenlänge.

Sein Volumen beträgt (unabhängig davon, wie dieser Quader aus den Würfeln zusammengesetzt wurde) daher $40\cdot(0,5\,\text{dm})^3 = 5\,\text{dm}^3$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300724:



a) Für $\beta = \overline{\sphericalangle ABC}$, $\gamma = \overline{\sphericalangle ACB}$ gilt nach Voraussetzung

$$\overline{\sphericalangle CBS} = \overline{\sphericalangle CBD} = \frac{\beta}{2}, \qquad \overline{\sphericalangle BCS} = \overline{\sphericalangle BCE} = \frac{\gamma}{2}.$$

Nach den Außenwinkelsatz für ΔBCS folgt hieraus

$$\overline{\sphericalangle BSE} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Nach dem Innenwinkelsatz für ΔABC ist $\beta + \gamma = 180° - \alpha = 120°$; damit ergibt sich

$$\overline{\sphericalangle BSE} = \frac{1}{2} \cdot 120° = 60° \qquad \square$$

b) Diese Herleitung bleibt bis einschließlich zur Formel $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ für beliebig vorgegebenes α gültig; damit erhält man als gesuchte Formel

$$\overline{\sphericalangle BSE} = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \tfrac{\alpha}{2}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission