30. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Saison 1990/1991

Aufgaben und Lösungen

30. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300521:

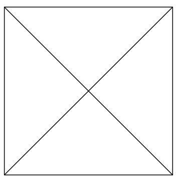


Abb. A 300521

a) Die Abbildung A 300521 zeigt eine Zerlegung eines Quadrates durch geradlinige Schnitte in vier Teilfiguren.

Gib an, wie sich aus diesen Teilfiguren zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen! Als Lösung genügt eine Zeichnung der beiden neu zusammengesetzten Quadrate.

b) Stelle fest, ob man ein Quadrat durch geradlinige Schnitte so in sechs Teilfiguren zerlegen kann, daß sich aus ihnen zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen!

Wenn eine solche Zerlegung möglich ist, genügt es als Lösung, eine solche Zerlegung und die beiden neu zusammengesetzten Quadrate zu zeichnen.

Aufgabe 300522:

Über das Alter der fünf Personen Antje, Dirk, Manuela, Susanne und Thomas werden folgende Angaben gemacht:

(1) Antje ist älter als Manuela, aber jünger als Susanne.

(2) Thomas ist genau so alt wie Antje und Manuela zusammen.

(3) Dirk ist älter als Antje und Susanne zusammen.

a) Zeige, daß aus diesen Angaben eindeutig folgt, wer die jüngste und wer die älteste dieser fünf Personen ist!

b) Stelle fest, ob aus den Angaben auch eindeutig folgt, welche Reihenfolge für die Altersangaben der übrigen drei Personen vorliegt! Begründe deine Feststellung!

Aufgabe 300523:

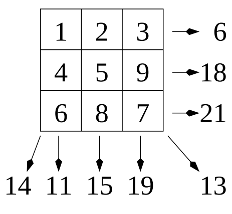


Abb. A 300523

a) Die Zahlen 1, 2, ..., 9 lassen sich so in ein Quadrat von 3 x 3 Feldern eintragen, daß keine zwei der acht Summen in den drei Zeilen, den drei Spalten und den beiden Diagonalen einander gleich sind. Die Abbildung A 300523 zeigt ein Beispiel hierfür.

Gib zwei weitere Beispiele an, die aus Abbildung A 300523 weder durch Spiegeln noch durch Drehen zu erhalten sind und die auch nicht auseinander durch Spiegeln oder Drehen hervorgehen!

b) Ist es möglich, in ein Quadrat von 2 x 2 Feldern die Zahlen 1, 2, 3, 4 so einzutragen, daß keine zwei der Summen in den Zeilen, den Spalten und den Diagonalen einander gleich sind?

Begründe Deine Antwort!

Aufgabe 300524:

An einem Sportwettkampf sollen 10 Mannschaften teilnehmen. Sie sollen so mit einfarbigen Turnhemden und mit einfarbigen Turnhosen ausgestattet werden, daß sie an den damit erreichbaren Farbkombinationen voneinander zu unterscheiden sind.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Farben, mit der das zu erreichen ist?

b) Wie lautet die Antwort, wenn zusätzlich verlangt wird, daß bei jeder Mannschaft die beiden Farben von Turnhemd und Turnhose voneinander verschieden sind?

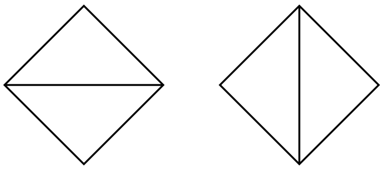
Begründe deine beiden Antworten!

30. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Lösungen

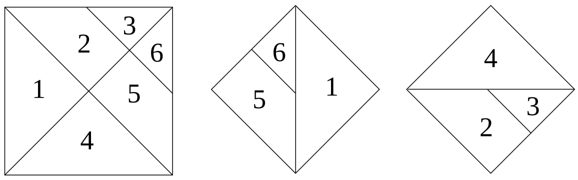
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 300521:

a)



b)



Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 300522:

a)
1. aus (1) läßt sich feststellen, daß von der jüngsten zur ältesten Person folgende Reihenfolge auftritt: Manuela - Anje - Susanne ($m < a < s$)
2. aus (2) folgt, daß Thomas älter als Manuela und Anje ist ($m < t$, $a < t$).
3. aus (3) folgt, daß Dirk älter als Anje und Susanne ist ($a < d$, $s < d$)
4. aus 1., 2., 3. folgt, daß Dirk älter als Thomas ist, denn Thomas ist so alt wie Manuela+Antje, und Dirk ist älter als Antje und Susanne, also auch älter als Manuela+Antje aus (1) ($t = m + a < s + a < d$)

So ist Manuela die Jüngste und Dirk der Älteste.

b) Es liegt keine eindeutige Reihenfolge vor. Da es zwischen Susanne und Thomas keinen Vergleich gibt, kann Thomas jünger, älter oder genauso alt wie Susanne sein. Alle bekannten Vergleiche sehen wie folgt aus:

m	$<$	a	$<$	s			aus 1.
m	$<$			t			aus 2.
		a	$<$	t			aus 2.
		a	$<$			d	aus 3.
				s	$<$	d	aus 3.
				t	$<$	d	aus 4.

Da hierin alle Kenntnisse eingeflossen sind, ist die Reihenfolge von Susanne und Thomas wie oben beschrieben unbestimmt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Felix Kaschura

Lösung 300523:

a)

	9	3	1	→ 13
	4	6	7	→ 17
	5	2	8	→ 15
12	18	11	16	23

	9	8	7	→ 24
	6	5	1	→ 12
	4	2	3	→ 9
16	19	15	11	17

b) Aus den 4 Zahlen lassen sich paarweise genau 6 Summen erzeugen ($1 + 2$, $1 + 3$, $1 + 4$, $2 + 3$, $2 + 4$, $3 + 4$), von denen eine gleich ist: $1 + 4 = 2 + 3$. Es gibt also weniger als 6 verschiedene solche Summen.

Bei einem 2 x 2 - Quadrat gibt es jedoch genau 6 verschiedene Summen zu berücksichtigen: 2 Zeilen-, 2 Spalten- und 2 Diagonalensummen. Es ist daher nicht möglich, ein solches Quadrat zu erzeugen, das die geforderten Bedingungen erfüllt.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 300524:

a) Die Anzahl aller Möglichkeiten ergibt sich so: Anzahl der Möglichkeiten ist Farben der Turnhemden mal Farben der Turnhosen, also: Anzahl der Möglichkeiten $= x \cdot x = x^2 \Rightarrow x^2 \geq 10 \Rightarrow x \geq \sqrt{10} \Rightarrow x > 3$. Die letzte Abschätzung gilt, da $x \in \mathbb{N}$ und $3 < \sqrt{10} < 4$. Die kleinste Zahl ist somit die 4, es müssen vier verschiedene Farben mindestens sein!

Probe: Es gibt $4 \cdot 4 = 16$ Möglichkeiten. 10 Kombinationen sind also kein Problem.

b) Die Anzahl aller Möglichkeiten ergibt sich so: Anzahl der Möglichkeiten ist Farben der Turnhemden mal Farben der Turnhosen außer Turnhemdfarbe, also: Anzahl der Möglichkeiten $= x \cdot (x - 1) = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x \geq 10$. Unter Benutzung des Ergebnisses der Teilaufgabe a) wird nun $x = 4$, $x = 3$ u.s.w. eingesetzt, bis die Ungleichung nicht mehr erfüllt ist:
$x = 4 \Rightarrow 4^2 - 4 = 12 > 10$
$x = 3 \Rightarrow 3^2 - 3 = 6 < 10$
Die kleinste Zahl die diese Bedingungen erfüllt ist 4, also muß es wieder 4 verschiedene Farben geben.

Probe: Es gibt $4 \cdot (4 - 1) = 12$ Möglichkeiten, 10 Kombinationen sind also kein Problem.

Hinweis: Die allgemeine Formel lautet für Teilaufgabe a): Variation mit Wiederholung zur 2. Klasse $\overline{V}_n^2 = n^2$ und für Teilaufgabe b): Variation ohne Wiederholung zur 2. Klasse $V_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Felix Kaschura