29. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Saison 1989/1990

Aufgaben und Lösungen

29. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 291021:

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{9}, \tag{1}$$

$$\frac{x+\sqrt{x}}{y+\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \tag{2}$$

Aufgabe 291022:

Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Auf einem Spielbrett sind 8 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.

Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus. Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um zwei Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um einen Schritt. Dieses Voransetzen beider Steine gilt dann als ein *Zug*. Werfen beide Spieler die gleiche Augenzahl, so wird kein *Zug* ausgeführt, sondern nochmals gewürfelt. Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, daß ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).

Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines *Zuges* der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht. Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht. Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.

Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von *Zügen*, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann? Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 291023:

Gegeben sei ein Trapez mit parallelen Seiten AB und CD. Dabei sei $\overline{AB} > \overline{CD}$.

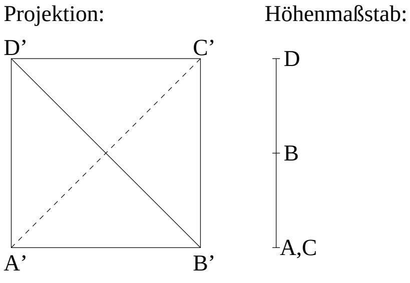
Man zeige, daß sich das Trapez genau dann durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen läßt, wenn $\overline{AB} < 3 \cdot \overline{CD}$ gilt.

Aufgabe 291024:

Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper $ABCD$ in senkrechter Eintafelprojektion dar. Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Im Höhenmaßstab haben A, C von D ebenfalls den Abstand a, während B im Höhenmaßstab den Abstand $\frac{a}{2}$ von D hat.

a) Zeichnen Sie diesen Körper $ABCD$ in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei!

b) Ermitteln Sie aus den obigen Angaben das Volumen $V(ABCD)$ des Körpers!



29. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 291021:

Aus $\frac{x}{y} = \frac{4}{9}$ folgt $x = \frac{4}{9}y$. Dies wird nun in (2) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{4}{9}y + \sqrt{\frac{4}{9}y}}{y + \sqrt{y}} &= \frac{1}{2} \\
2 \cdot \left(\frac{4}{9}y + \frac{2}{3}\sqrt{y}\right) &= y + \sqrt{y} \\
2 \cdot \left(\frac{4}{9}(y + \sqrt{y}) - \frac{4}{9}\sqrt{y} + \frac{2}{3}\sqrt{y}\right) &= y + \sqrt{y} \\
\frac{8}{9}(y + \sqrt{y}) - \frac{8}{9}\sqrt{y} + \frac{4}{3}\sqrt{y} &= y + \sqrt{y} \\
\frac{4}{3}\sqrt{y} - \frac{8}{9}\sqrt{y} &= \frac{1}{9}(y + \sqrt{y}) \\
\frac{12 - 8}{9} &= \frac{1}{9}(\sqrt{y} + 1) \\
4 &= \sqrt{y} + 1 \\
\sqrt{y} &= 3 \\
y &= 9
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für x folgender Wert: $x = 4$. Die Probe bestätigt das gefundene Zahlenpaar ($x = 4$, $y = 9$), welches die einzige reelle Lösung der Aufgabe darstellt.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 291022:

Beide Spieler zusammen legen pro Zug 3 Felder zurück. Damit am Ende beide wieder auf A stehen, dürfen sie nur vollständige Umläufe zu 8 Feldern zurücklegen.

n = Anzahl der Umläufe (beider Spieler zusammen)
z = Anzahl der Züge
$\Rightarrow 3z = 8n \Rightarrow$ da 8 nicht durch 3 teilbar ist, muss n Vielfaches von 3 sein.

1. $n = 3 \Rightarrow z = 8$
   Nun legt o.B.d.A. Spieler 1 einen, Spieler 2 zwei Umläufe zurück, d. h. Spieler 2 muss alle 8 Würfelduelle gewinnen. Dadurch kommt er aber schon im ersten Umlauf auf A, während der andere auf dem 4. Feld steht, und gewinnt damit das Spiel. Ein Unentschieden mit n = 3 ist also nicht möglich.

2. $n = 6 \Rightarrow z = \frac{48}{3} = 16$
   Nun muss nur noch bewiesen werden, dass 16 Züge tatsächlich zu einem Unentschieden führen können:

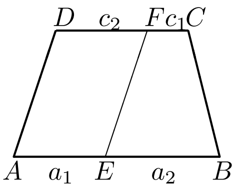
Spieler X bzw. Y	Stellung X	Stellung Y
X gewinnt, danach Y	3. Feld	3. Feld
X gewinnt 4x	11. Feld	7. Feld
Y gewinnt 2x, danach X 2x	17. Feld	13. Feld
Y gewinnt 4x	21. Feld	21. Feld
X gewinnt, danach Y	24. Feld = A	24. Feld = A

   Beide Spieler kommen erst nach dem dritten Umlauf auf A zu stehen (es gewinnt also niemand schon früher). Nach diesen 16 Zügen stehen sie beide auf A $\Rightarrow$ Unentschieden. Mit weniger Umläufen (und damit Zügen) ist dies nicht möglich.

Antwort: nach 16 Zügen ist frühestens ein Unentschieden möglich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Peter Hieber

Lösung 291023:



Die Aufgabenstellung erfordert einen Beweis in beiden Richtungen ("genau dann ... wenn"). Es werden die Bezeichnungen aus den Skizzen verwendet. Für den Beweis ist es nicht von Belang, ob eine Parallele EF zu AD oder BC betrachtet wird.

I. *Vor.:* $A_{AEFD} = A_{EBCF}$ (1)
$a_1 + a_2 > c_1 + c_2$ (2)
$AD \parallel EF$ und $AB \parallel CD$ (3)

Beh.: $a_1 + a_2 < 3 \cdot (c_1 + c_2)$

Bew.: Aus (3) folgt, daß $AEFD$ ein Parallelogramm und mithin $a_1 = c_2$ ist. Der Flächeninhalt ist also durch $A_{AEFD} = h \cdot a_1$ festgelegt. Der Flächeinhalt vom Trapez $EBCF$ lautet: $A_{EBCF} = \frac{h}{2} \cdot (a_2 + c_1)$. Nach Gleichsetzen der Flächeninhalte (siehe (1)) gilt: $h \cdot a_1 = \frac{h}{2} \cdot (a_2 + c_1) \Leftrightarrow 2 \cdot a_1 = a_2 + c_1 \Leftrightarrow 3 \cdot a_1 = a_1 + a_2 + c_1 \Leftrightarrow a_1 + a_2 = 3 \cdot a_1 - c_1$. Ersetzt man a_1 durch c_2, dann gilt weiterhin: $a_1 + a_2 = 3 \cdot c_2 - c_1 \Leftrightarrow a_1 + a_2 = 3 \cdot c_2 + 3 \cdot c_1 - 4c_1 \Rightarrow a_1 + a_2 < 3 \cdot (c_1 + c_2)$.

q.e.d.

II. *Vor.:* $a = a_1 + a_2 > c_1 + c_2 = c$ (1)
$AD \parallel EF$ und $AB \parallel CD$ (2)
$a_1 + a_2 < 3 \cdot (c_1 + c_2)$ (3)

Beh.: $\exists c_1, c_2$, so daß $A_{AEFD} = A_{EBCF}$

Bew.: Die Parallele EF wandere von $F = D$ nach $F = C$. Zweckmäßigerweise definiert man $x := \frac{c_2}{c}$, wobei $0 < x < 1$ gelten muß. Es sei nun die Verhältnisfunktion $f(x) = \frac{A_{AEFD}}{A_{EBCF}}$ betrachtet und geprüft, wann sie den Wert 1 annimmt. Für diesen Fall ergeben sich dann die folgenden Gleichungen:

$$f(x) = 1 = \frac{a_1 \cdot h}{\frac{a_2 + c_1}{2} \cdot h}$$
$$a_2 + c_1 = 2a_1$$
$$a - c_2 + c - c_2 = 2c_2$$
$$\frac{a}{c} - 2x + 1 = 2x$$
$$a = (4x - 1) \cdot c$$

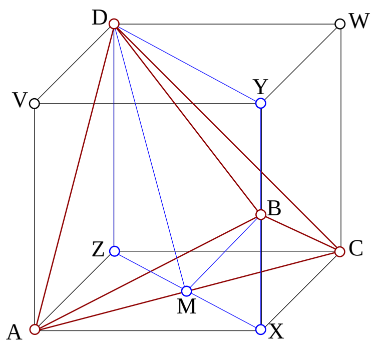
Die erhaltene Funktion ist linear. Betrachtet man die Grenzwerte, so ergibt sich für $x > 0$: $a > -c$. Laut (1) wird aber $a > c$ vorausgesetzt und ist für alle $x > \frac{1}{2}$ erfüllt. Für den anderen Grenzwert $x < 1$ erhalten wir: $a < 3c$. Dies wiederum ist durch Voraussetzung (3) erfüllt. Das heißt: mit den Voraussetzungen, insbesondere mit (1) und (3) existiert eine Parallele zu AB so, daß sie das Trapez in zwei Vierecke teilt und die Flächeinhalte der entstehenden Vierecke gleich groß sind.

q.e.d.

Aufgeschrieben und gelöst von Arnd Hübsch

Lösung 291024:

a)



Die Figur mit den roten Kanten ist der darzustellende Körper $ABCD$.

b) Es wird nun ein Schnitt entlang den Würfelseitendiagonalen ZX und DY entsprechend der Bezeichnung in der Abbildung a) durchgeführt. Diese Ebene schneidet den Körper in den Kanten MB, BD und MD, wobei M als Diagonalenschnittpunkt im Quadrat $AXCZ$ Mittelpunkt von ZX ist.

Mit der vorgegebenen Würfellänge a ergeben sich folgende Größen für die Seitenlängen des Dreiecks ΔMBD nach Anwendung des Satzes des Pythagoras:

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BY}^2 + \overline{DY}^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}}a = \frac{3}{2}a$$
$$\overline{MB} = \sqrt{\overline{MX}^2 + \overline{BX}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$
$$\overline{MD} = \sqrt{\overline{MZ}^2 + \overline{DZ}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$$

Weiterhin gilt: $\overline{MB}^2 + \overline{MD}^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a^2 = \frac{3+6}{4}a^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \overline{BD}^2$. Nach der Umkehrung vom Satz des Pythagoras steht demnach $\overline{MB}$ senkrecht auf $\overline{MD}$.

Da die Schnittebene das Trapez $ABCD$ symmetrisch schneidet und $\overline{MB}$ innerhalb der Schnittebene liegt und senkrecht auf $\overline{MD}$ steht, ist $\overline{MB}$ gleichzeitig die Höhe im Trapez auf der Grundfläche ACD, d.h. $h_{ACD} = \overline{MB} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Das Dreieck ΔACD ist gleichseitig, da jede Seitenlänge eine Würfelseitendiagonale und somit $\sqrt{2}a$ lang ist. Damit ergibt sich für den Flächeninhalt im gleichseitigen Dreieck ΔACD:

$$\begin{aligned} A_{ACD} &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}a\right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \end{aligned}$$

Das Volumen des Tetraeders berechnet sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{3} \cdot A_{ACD} \cdot h_{ACD} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \\ &= \frac{a^3}{4} \end{aligned}$$

Bemerkung: Alternativ kann man das Volumen auch berechnen, indem man von dem Würfelvolumen ($= a^3$) die Volumina der Tetraeder $ACBX$ ($V_{ACBX} = \frac{a^3}{12}$) und $ACDZ$ ($V_{ACDZ} = \frac{a^3}{6}$) sowie der Pyramiden mit den Grundflächen $YBCW$ und $YBAV$ und der Spitze D ($V_{YBCWD} = V_{YBAVD} = \frac{a^3}{4}$) abzieht.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Thomas und Manuela Kugel