29. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Saison 1989/1990

Aufgaben und Lösungen

29. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290621:

Jana will an der Wandzeitung über Christians, Alexanders und Martins Erfolge in der außerunterrichtlichen Tätigkeit berichten. Sie befragt die drei Schüler und notiert sich folgendes:

(1) Alle drei Schüler nahmen an der Mathematikolympiade teil. Einer dieser Schüler errang einen ersten Preis, ein weiterer von ihnen einen zweiten Preis und der restliche Schüler einen dritten Preis.

(2) Martin und der Gewinner des zweiten Preises betreiben gern Leichtathletik. Beide erkämpften beim letzten Sportfest je eine Silbermedaille.

(3) Im Wettbewerb der Jungen Rezitatoren schnitt der Gewinner des zweiten Preises bei der Mathematikolympiade besser als Christian ab.

(4) Der Gewinner des ersten Preises bei der Mathematikolympiade spielt in seiner Freizeit gern Schach; sein häufigster Gegner dabei ist Martin.

Als Jana ihre Notizen durchliest, stellt sie fest, daß sie gar nicht aufgeschrieben hat, welcher der drei Schüler welchen der drei Preise bei der Mathematikolympiade errang.

Stelle fest, ob sich das trotzdem aus den Notizen von Jana eindeutig ermitteln läßt! Wenn dies der Fall ist, so gib die Verteilung der drei Preise an!

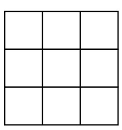
Aufgabe 290622:

a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte $A(2;\,3)$, $B(6;\,1)$, $C(6;\,5)$ und $D(4;\,6)$ ein! Verbinde die Punkte A, B, C und D so miteinander, daß ein Viereck entsteht! Verbinde dann in diesem Viereck den Punkt A mit dem Punkt C und den Punkt B mit D! Bezeichne den Schnittpunkt der Strecken AC und BD mit E!

b) Spiegele die erhaltene Figur an der Geraden durch C und D! Verbinde anschließend noch den Punkt A mit seinem Bildpunkt A' und den Punkt B mit seinem Bildpunkt B'!

c) Die insgesamt erhaltene Figur soll längs ihrer Strecke so durchlaufen werden, daß jede Strecke genau einmal in einem solchen Weg vorkommt. Wähle einen geeigneten Anfangspunkt und schreibe einen derartigen Weg auf!

Aufgabe 290623:



Das Bild zeigt ein Quadrat, das sich aus neun Feldern zusammensetzt. Die Seitenlänge jedes einzelnen Feldes sei 1 cm.

a) Ermittle die Anzahl aller derjenigen Rechtecke, die aus solchen Feldern bestehen!

b) Ermittle die Summe der Flächeninhalte aller dieser Rechtecke!

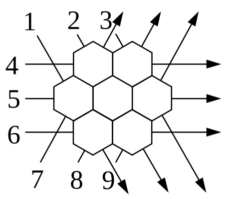
Aufgabe 290624:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

a) In ein 3×3-Quadrat sollen die Zahlen 1 bis 9 so eingetragen werden, daß jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und daß sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe ergibt.

Das Bild zeigt dafür ein Beispiel.

Gib eine weitere Eintragung der geforderten Art an!



b) Als in der Mathematik-AG über solche Aufgaben gesprochen wurde, versuchte Peter, eine Aufgabe mit sechseckigen Feldern zu stellen. Er wählt die Figur aus dem Bild und stellt die Aufgabe:

In die sieben Felder sollen die Zahlen 1 bis 7 so eingetragen werden, daß jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und daß sich in jeder der neun gekennzeichneten Linien die gleiche Summe ergibt.

Gibt es eine derartige Eintragung? Wenn das der Fall ist, gib ein Beispiel an! Wenn es unmöglich ist, eine solche Eintragung zu bilden, begründe das!

29. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 290621:

Aus den Notizen folgt:

Nach (2) sind Martin und der Gewinner des zweiten Preises zwei Schüler, d.h., Martin gewann nicht den zweiten Preis. Nach (3) gewann auch Christian nicht den zweiten Preis. Also folgt aus (1):

(5) Den zweiten Preis gewann Alexander.

Nach (4) ist Martin nicht der Gewinner des ersten Preises. Hieraus und aus (5), (1) folgt:

(6) Den ersten Preis gewann Christian,

(7) den dritten Preis gewann Martin.

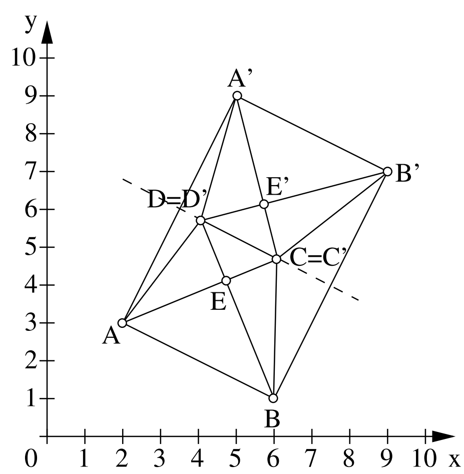
Damit ist gezeigt, daß sich diese Verteilung (5), (6), (7) eindeutig aus Janas Notizen ermitteln läßt.

Bemerkung: Eine Probe (Nachweis, daß die Verteilung (5), (6), (7) die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt) ist zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da man die Existenz einer Verteilung, die diese Bedingungen erfüllt, dem Aufgabentext entnehmen kann.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290622:

a) und b):



c) Ein möglicher Weg ist:

$$D,\ A,\ B,\ E,\ D,\ C,\ E,\ A,\ A',\ D,\ E',\ B',\ C,\ E',\ A',\ B',\ B,\ C$$

(Dieser Weg kann z.B. auch so beschrieben werden:

$$D,\ A,\ B,\ D,\ C,\ A,\ A',\ D,\ B',\ C,\ A',\ B',\ B,\ C.$$

Wegen $C = C'$ und $D = D'$ kann ferner in einer Beschreibung wahlweise C' bzw. D' statt C bzw. D stehen.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290623:

Für jede mögliche Größe von Rechtecken der genannten Art erhält man die in der folgenden Tabelle aufgeführten Angaben:

Rechtecke	Flächeninhalt	Anzahl der Rechtecke	Summe der Flächeninhalte
$1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm}$	1 cm^2	9	9 cm^2
$1\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}$	2 cm^2	12	24 cm^2
$1\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}$	3 cm^2	6	18 cm^2
$2\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}$	4 cm^2	4	16 cm^2
$2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}$	6 cm^2	4	24 cm^2
$3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}$	9 cm^2	1	9 cm^2
		36	100 cm^2

Damit hat sich ergeben:

a) Die Anzahl der genannten Rechtecke beträgt 36.

b) Die Summe ihrer Flächeninhalte beträgt 100 cm^2.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290624:

a) Ein Beispiel zeigt die Abbildung a.

b) Es gibt keine derartige Eintragung.

1. Beweismöglichkeit: Da es drei der gekennzeichneten Linien gibt, die die gesamte Figur überdecken, ohne ein Feld mehrmals zu erfassen, müßte bei einer Eintragung der geforderten Art das Dreifache der in jeder Linie zu erreichenden Summe gleich 28 sein; denn es gilt $1 + 2 + ... + 7 = 28$. Da aber 28 nicht durch 3 teilbar ist, ist das nicht möglich.

2. Beweismöglichkeit: Bei einer Eintragung der geforderten Art müßte beispielsweise $x + y = x + z$ für die in der Abbildung b angegebenen Zahlen x, y, z gelten. Das hätte aber $y = z$ zur Folge, im Widerspruch zu den Forderungen der Aufgabe.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Abbildung a

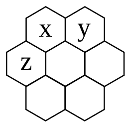


Abbildung b

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission