29. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Saison 1989/1990

Aufgaben und Lösungen

29. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290521:

1			
		2	
	3		
			4

Die leeren Felder im Bild sind so mit Zahlen 1, 2, 3, 4 auszufüllen, daß jede dieser Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vorkommt.

Gib alle solche Eintragungen an!

(Ein Beweis, daß es keine weiteren derartigen Eintragungen gibt, wird nicht verlangt.)

Aufgabe 290522:

Susanne besitzt 18 Spielwürfel. Einige davon sind rot, andere blau und die restlichen gelb. Sie stellt fest, daß die Anzahl der blauen Würfel um 1 kleiner ist als die doppelte Anzahl der roten Würfel. Weiter bemerkt sie, daß das Dreifache der Anzahl der roten Würfel, wenn man es um 1 vermehrt, gerade die Anzahl der gelben Würfel ergibt.

Zeige, daß Susannes Feststellungen nur bei einer einzigen Möglichkeit für die drei Anzahlen der roten, blauen und gelben Würfel wahr sein können! Gib diese drei Anzahlen an!

Aufgabe 290523:

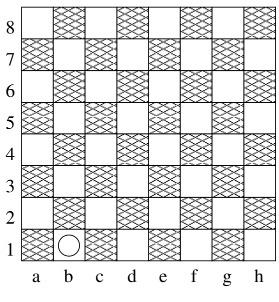
Gesucht ist eine natürliche Zahl z, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) An der Zehnerstelle von z steht die Ziffer 0.

(2) Wenn man aus z durch Weglassen der Ziffer 0 an der Zehnerstelle eine neue Zahl z' bildet und dann die Summe $z + z'$ ausrechnet so erhält man 5174.

Zeige, daß es nur eine Zahl geben kann, die diese Bedingungen erfüllt, und gib diese Zahl an! Überprüfe auch, daß die von dir angegebene Zahl z die Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 290524:



Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damenstein aus dem Feld $b1$. Er darf, wie im Damespiel üblich, nur stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gezogen werden.

a) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von $b1$ bis zum Feld $g8$ gelangen kann!

b) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von $b1$ bis zum Feld $e8$ gelangen kann!

29. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 290521:

Die Abbildung zeigt alle geforderten Eintragungen.

1	2	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4

1	4	3	2
4	1	2	3
2	3	4	1
3	2	1	4

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290522:

Wenn x die Anzahl der roten Würfel ist, dann ist nach Susannes Feststellungen $2x-1$ die Anzahl der blauen Würfel und $3x+1$ die Anzahl der gelben Würfel. Die Summe der drei Anzahlen ist 18, also folgt

$$\begin{aligned} x+2x-1+3x+1 &= 18, \\ 6x &= 18, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned} 2x-1 &= 2\cdot 3-1 = 5 \\ \text{und}\ \ 3x+1 &= 3\cdot 3+1 = 10. \end{aligned}$$

Also können Susannes Feststellungen nur wahr sein, wenn die Anzahl der roten Würfel 3, die Anzahl der blauen Würfel 5 und die Anzahl der gelben Würfel 10 beträgt.

Hinweise zu anderen Lösungsmöglichkeiten und zur Korrektur

1. Man kann auch eine andere oder mehr als eine Variable einführen, z.B. außer x auch y, z für die Anzahlen der blauen bzw. gelben Würfel, und dann z.B. $y=2x-1$ und $z=3x+1$ in die Gleichung $x+y+z=18$ einsetzen.

2. Statt derartiger als Gleichung geschriebener Aussagen können auch verbale Formulierungen verwendet werden, z.B.: Addiert man zur Anzahl der roten Würfel das Doppelte und das Dreifache dieser Anzahl, so hat man die Summe aus der Anzahl der roten Würfel, der um 1 verringerten Anzahl der blauen Würfel und der um 1 vermehrten Anzahl der gelben Würfel gebildet. Das führt aber zum gleichen Ergebnis, als hätte man die drei Anzahlen selbst addiert, also zum Ergebnis 18. Daher muß die sechsfache Anzahl der roten Würfel 18 betragen u.s.w.

3. Man kann auch Probierverfahren ansetzen, z.B. in Tabellenform

Anzahl der roten Würfel	1	2	3	> 3
Anzahl der blauen Würfel	1	3	5	> 5
Anzahl der gelben Würfel	4	7	10	> 10
Summe	6	12	18	> 18

   Fehlt die letzte Spalte oder eine gleichwertige Aussage, so ist die Aufgabenstellung (Nachweis der Einzigkeit) nicht erfüllt. Dasselbe gilt, wenn überhaupt nur die Anzahlen 3, 5, 10 angegeben werden; auch wenn zusätzlich eine Probe (in Gleichungs- oder Textform) zu diesen Anzahlen erfolgt.

4. Eine Probe, d.h. die Aussage, daß wegen $3+5+10 = 18$, $2\cdot 3-1 = 5$ und $3\cdot 3+1 = 10$ alle Bedingungen des Aufgabentextes von den angegebenen Anzahlen 3, 5, 10 erfüllt werden, ist zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da die Realisierbarkeit dieser Bedingungen nicht erfragt war (und auch dem Aufgabentext entnommen werden kann).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290523:

Wenn eine Zahl z die Bedingungen erfüllt, so muß sie vierstellig sein; denn hätte sie mehr Stellen, so erst recht $z+z'$; hätte sie aber 3 oder weniger Stellen, so könnte $z+z'$ höchstens mit der Anfangsziffer 1 vierstellig sein. Sind nun a, b, c, d die Ziffern von z, so folgt aus (1), daß

$$c = 0$$

ist, und wegen (2) wird das Kryptogramm

$$\begin{array}{cccc} & \text{a} & \text{b} & 0 & \text{d} \\ + & & \text{a} & \text{b} & \text{d} \\ \hline & 5 & 1 & 7 & 4 \end{array}$$

erfüllt.

An der Einerstelle ist ersichtlich, daß $2d = 4$ oder $2d = 14$ gilt.

Im Fall $2d = 4$, also

$$d = 2, , .$$

folgt für die Zehnerstelle

$$b = 7,$$

und an der Hunderterstelle kann wegen $7 + a = 11$ nur

$$a = 4$$

stehen.

Im Fall $2d = 14$, also $d = 7$, folgte für die Zehnerstelle $b = 6$, für die Hunderterstelle wegen $6 + a = 11$ also $a = 5$, und wegen des Übertrags ergäbe sich in der Tausenderstelle der Summe nicht 5, sondern 6.

Also scheidet der Fall $2d = 14$ aus.

Daher können die Bedingungen nur von der Zahl $z = 4702$ erfüllt werden. Die Überprüfung

$$\begin{array}{rcccc} & 4 & 7 & 0 & 2 \\ + & & 4 & 7 & 2 \\ \hline & 5 & 1 & 7 & 4 \end{array}$$

zeigt, daß diese Zahl die Bedingungen erfüllt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290524:

8					20		7	
7				14		6		1
6			9		5		1	
5		5		4		1		0
4	2		3		1		0	
3		2		1		0		0
2	1		1		0		0	
1		1		0		0		0
	a	b	c	d	e	f	g	h

Die gesuchten Anzahlen lassen sich ermitteln, indem man in jedes (weiße) Feld die Anzahl aller derjenigen Wege einträgt, auf denen dieses Feld von $b1$ aus erreichbar ist, und dabei der Reihe nach die Felder der Zeilen 1, 2,...,8 abarbeitet. (Wie man feststellen kann, genügt es, nur die in der Abbildung eingetragenen Zahlen zu berücksichtigen.)

Das Feld $b1$ erhält die Anzahl 1, die anderen Felder der Zeile 1 die Anzahl 0. In jedes weitere Feld wird die Summe der (höchsten zwei) Anzahlen eingetragen, die schräg unter diesem Feld liegen; denn genau aus solchen Feldern führen alle Wege auf das betrachtete Feld. So kommt man zu den Eintragungen in der Abbildung und damit zu den Angaben:

a) Von $b1$ nach $g8$ führen genau 7 Wege.

b) Von $b1$ nach $e8$ führen genau 20 Wege.

Bemerkung: Man kann auch die Wege selbst angeben (um sie anschließend abzuzählen). Es muß dann aus der Darstellung des Lösungstextes hervorgehen, wie sie gefunden wurden (insbesondere, wie die Vollständigkeit und Wiederholungsfreiheit ihrer Aufzählung gesichert wurde); d.h., daß berücksichtigt wurde, welche Fortsetzungen von einem Feld aus jeweils insgesamt möglich sind.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission