28. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1988/1989

Aufgaben und Lösungen

28. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280731:

Das Volumen eines Würfels w_1 ist achtmal so groß wie das Volumen eines Würfels w_2. Wäre das Volumen von w_2 um genau $9\,\text{cm}^3$ kleiner, so wäre es gleich einem Zwölftel des Volumens von w_1.

Ermittle aus diesen Angaben die Kantenlängen a_1 und a_2 der beiden Würfel w_1 und w_2!

Aufgabe 280732:

In einer Fabrik zur Herstellung von alkoholhaltigen Essenzen soll aus einem Restbestand von 300 kg 32prozentigem Alkohol durch Zugabe von 90prozentigem Alkohol ein neuer Bestand von 40prozentigem Alkohol hergestellt werden.

Ermittle diejenige Menge 90prozentigen Alkohols, mit der das erreicht wird!

Aufgabe 280733:

Gegeben sei ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC. Gesucht ist eine Gerade g, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Gerade g ist parallel zu AB, sie schneidet die Seite AC in einem Punkt D und die Seite BC in einem Punkt E.

(2) Für diese Punkte gilt $\overline{AD} + \overline{BE} = \overline{DE}$.

I. Zeige, daß eine Gerade g, wenn sie die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, zu dem Dreieck konstruiert werden kann!

II. Beschreibe eine solche Konstruktion!

III. Zeige, daß eine Gerade g, wenn sie nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!

IV. Konstruiere ein beliebiges spitzwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck ABC und zu diesem nach deiner Beschreibung auch g!

Aufgabe 280734:

Ermittle alle diejenigen Paare (p, q) aus zwei Primzahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen!

(1) Es gilt $q > p + 1$.

(2) Die Zahl $s = p + q$ ist ebenfalls eine Primzahl.

(3) Die Zahl $p \cdot q \cdot s$ ist durch 10 teilbar.

Aufgabe 280735:

Beweise, daß für jedes Dreieck ABC folgende Aussage gilt:

Wenn D, E, F in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB sind und wenn A', B', C', D', E', F' die Fußpunkte der Lote von A, B, C, D, E, F auf eine Gerade g sind, die ganz außerhalb des Dreiecks ABC verläuft und auf keiner der verlängerten Seiten BC, CA, AB senkrecht steht, dann gilt stets

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \overline{DD'} + \overline{EE'} + \overline{FF'}$$

Aufgabe 280736:

Auf einer Kreislinie seien die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 der Reihe nach angeordnet. Dann wird, beginnend mit der Zahl 1, jede fünfzehnte Zahl mit einer Markierung versehen, d.h., die Zahlen 1, 16, 31, 46, ... u.s.w. werden markiert.

Dieses Weiterzählen und Markieren jeder fünfzehnten Zahl wird umlaufend fortgesetzt, d.h., beim Weiterzählen läßt man auf die Zahl 1000 wieder die Zahl 1 folgen. Auch Zahlen, die bereits markiert sind, werden beim Weiterzählen stets mit berücksichtigt. Erst wenn zum weiteren Markieren nur noch Zahlen erreicht würden, die bereits markiert sind, wird der Vorgang beendet.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen Zahlen auf dem Kreis, die dann ohne Markierung geblieben sind!

28. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 280731:

Nach den Angaben gilt für die Volumina a_1^3 und a_2^3 von w_1 bzw. w_2

$$a_1^3 = 8\,a_2^3, \tag{1}$$

$$a_2^3 - 9\text{ cm}^3 = \frac{a_1^3}{12}. \tag{2}$$

Aus (2) folgt

$$12\,a_2^3 - 108\text{ cm}^3 = a_1^3,$$

hieraus und aus (1) folgt

$$\begin{aligned} 12\,a_2^3 - 108\text{ cm}^3 &= 8\,a_2^3,\\ 4\,a_2^3 &= 108\text{ cm}^3,\\ a_2^3 &= 27\text{ cm}^3,\\ a_2 &= 3\text{ cm}. \qquad (3)\end{aligned}$$

Daraus und aus (1) ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1^3 &= 8\cdot 27\text{ cm}^3,\\ a_1 &= 6\text{ cm}. \qquad (4)\end{aligned}$$

Mit (3) und (4) sind die gesuchten Kantenlängen ermittelt.

Hinweise zur Korrektur: Dem Aufgabentext kann die Existenz zweier Würfel für die die Angaben zutreffen, entnommen werden. Daher ist eine Probe zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich.

Werden nur die Angaben (3), (4) gemacht und wird dann die Probe durchgeführt (Bestätigung von $6^3 = 8\cdot 3^3$ und $3^3 - 9 = 18 = \frac{6^3}{12}$), so genügt dies noch nicht zur vollständigen Lösung; denn für eine solche wird verlangt, daß (3), (4) aus den Angaben der Aufgabenstellung folgen, d.h., daß diese Angaben für keine anderen Werte als (3), (4) zutreffen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280732:

Der Restbestand enthält $\frac{32}{100}\cdot 300\text{ kg} = 96\text{ kg}$ Alkohol. Fügt man (x kg 90prozentigen Alkohol und damit) $\frac{9}{10}\,x$ kg Alkohol hinzu, so enthält der neue Bestand $(96 + \frac{9}{10}x)$ kg Alkohol. Damit dies 40 Prozent der Menge $(300 + x)$ kg des neuen Bestandes sind, muß

$$96 + \frac{9}{10}\,x = \frac{4}{10}\,(300 + x)$$

gelten. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 96+\frac{9}{10}\,x &= 120+\frac{4}{10}\,x,\\ \frac{1}{2}\,x &= 24,\\ x &= 48. \end{aligned}$$

Die gesuchte Menge 90prozentigen Alkohols beträgt 48 kg.

Hinweise zur Korrektur: Dem Aufgabentext kann entnommen werden, daß das genannte Ziel durch genau eine Menge 90prozentigen Alkohols zu erreichen ist. Daher ist zu einer vollständigen Lösung *keine* Probe erforderlich.

Ferner ist daher auch - *als anderer Lösungsweg* - zu einer vollständigen Lösung ausreichend, die Angabe 48 kg 90prozentigen Alkohols zu machen und durch die Probe zu bestätigen, daß damit die geforderte Bedingung erfüllt wird: Zu $\frac{32}{100}\cdot 300\,\mathrm{kg} = 96\,\mathrm{kg}$ Alkohol des Restbestandes kommen $\frac{9}{10}\cdot 48\,\mathrm{kg} = 43{,}2\,\mathrm{kg}$ Alkohol hinzu, und $96\,\mathrm{kg} + 43{,}2\,\mathrm{kg} = 139{,}2\,\mathrm{kg}$ sind, wie gefordert, 40 Prozent von 348 kg. (Für einen solchen Löeungsweg kann die Angabe 48 kg beispielsweise durch Probieren gefunden sein.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280733:

I. Analyse:

Wenn eine Gerade g die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt:

Nach (2) gibt es auf der Strecke DE einen Punkt F, für den

$$\overline{DF} = \overline{AD} \text{ und } \overline{EF} = \overline{BE} \tag{3}$$

gilt. Aus (3) folgt nach dem Basiswinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle DAF} = \overline{\sphericalangle DFA} \text{ und } \overline{\sphericalangle EBF} = \overline{\sphericalangle EFB}; \tag{4}$$

wegen (1) gilt nach dem Wechselwinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle DFA} = \overline{\sphericalangle FAB} \text{ und } \overline{\sphericalangle EFB} = \overline{\sphericalangle ABF}; \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt: AF halbiert den Winkel $\sphericalangle BAC$, und BF halbiert den Winkel $\sphericalangle ABC$. Damit und wegen (1) ist gezeigt, daß eine Gerade g, wenn sie (1) und (2) erfüllt, nach folgender Beschreibung konstruiert werden kann:

II. Konstruktionsbeschreibung:

1. Man konstruiert die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$ und ihren Schnittpunkt F.
2. Man konstruiert die Parallele g durch F zu AB.

III. Beweis:

Wenn eine Gerade g nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt:

Nach Konstruktionsschritt 2. erfüllt die Gerade g die Bedingung $(1)^{*)}$.

Nach Konstruktionsschritt 1. gilt für ihre Schnittpunkte D, E mit AC bzw. BC ferner

$$\overline{\sphericalangle DAF} = \overline{\sphericalangle FAB} \text{ und } \overline{\sphericalangle EBF} = \overline{\sphericalangle ABF}; \tag{6}$$

nach Konstruktionsschritt 2. und dem Wechselwinkelsatz gilt

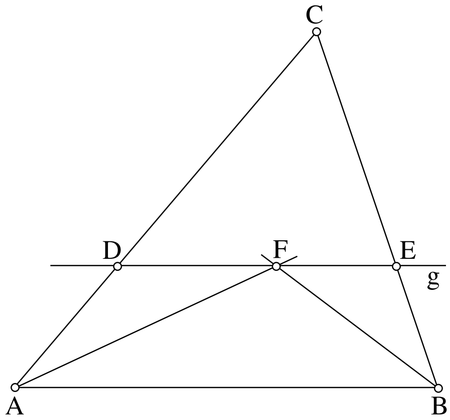
$$\overline{\sphericalangle FAB} = \overline{\sphericalangle DFA} \text{ und } \overline{\sphericalangle ABF} = \overline{\sphericalangle EFB}. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes

$\overline{AD} = \overline{DF}$ und $\overline{BE} = \overline{EF}$,

also ist mit $\overline{AD} + \overline{BE} = \overline{DF} + \overline{EF} = \overline{DE}$ auch die Bedingung (2) erfüllt.

IV. Konstruktion:



*) Eine Begründung, daß die Gerade g, da sie durch den im Inneren des Dreiecks ABC liegenden Punkt F geht, die Seiten AC und BC schneiden muß, wird vom Schüler nicht verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280734:

I. Wenn ein Paar $(p; q)$ von Primzahlen die Bedingungen erfüllt, so folgt:

Nach (1) und (2) sind q und s Primzahlen größer als 2, also ungerade. Da nach (3) aber $p \cdot q \cdot s$ gerade ist, muß p gerade sein, also

$$p = 2 \qquad (4)$$

gelten. Aus (3) und (4) folgt: $q \cdot s$ ist durch 5 teilbar. Da q und s Primzahlen sind, ist das nur möglich, wenn $q = 5$ oder $s = 5$ gilt.

Wegen (2) und (4) folgt hieraus $s = 7$ oder $q = 3$.

Da nach (1) und (4) aber $q > 3$ gilt, verbleibt nur die Möglichkeit $s = 7$ und damit $q = 5$. Also kann nur das Paar $(2; 5)$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

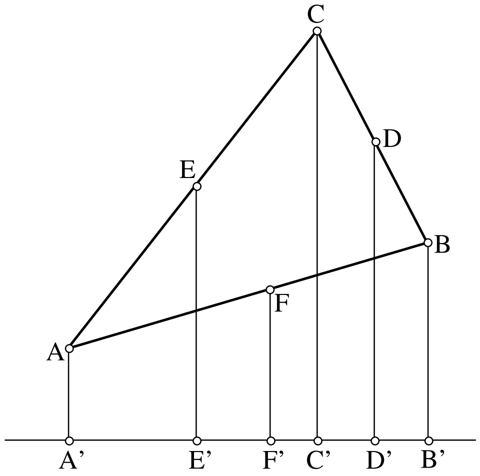
II. Es erfüllt diese Bedingungen; denn es gilt

$5 > 2 + 1$,
$s = 2 + 5 = 7$ ist eine Primzahl, und
$2 \cdot 5 \cdot 7$ ist durch 10 teilbar.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß genau das Paar $(2; 5)$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280735:



Nach Voraussetzung sind BB', CC' und DD' senkrecht zu g, also zueinander parallel, und D ist der Mittelpunkt von BC. Da die Gerade durch B und C auf g nicht senkrecht steht, ist die Gerade, in der das Lot BB' liegt, auch verschieden von der Geraden, in der CC' liegt.

Also ist $B'BCC'$ ein Trapez, und DD' ist seine Mittellinie. Nach dem Satz über die Länge der Mittellinie gilt folglich

$$\overline{DD'} = \frac{1}{2}\,(\overline{BB'} + \overline{CC'}).$$

Entsprechend erhält man auch

$$\overline{EE'} = \frac{1}{2}\,(\overline{CC'} + \overline{AA'}),$$
$$\overline{FF'} = \frac{1}{2}\,(\overline{AA'} + \overline{BB'}).$$

Durch (Ausmultiplizieren der Klammern und) Addieren dieser drei Gleichungen erhält man die Behauptung

$$\overline{DD'} + \overline{EE'} + \overline{FF'} = \overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280736:

In ersten Umlauf werden genau diejenigen der Zahlen markiert, die bei Division durch 15 den Rest 1 lassen. Die letzte dieser Zahlen ist 991.

Der zweite Umlauf erbringt als erste markierte Zahl die Zahl $991 + 15 - 1000 = 6$; anschließend werden folglich im zweiten Umlauf genau diejenigen der Zahlen markiert, die bei Division durch 15 den Rest 6 lassen. Die letzte dieser Zahlen ist 996.

Entsprechend werden im dritten Umlauf markiert: zuerst die Zahl $996 + 15 - 1000 = 11$, dann alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 11 lassen, und als letzte die Zahl 986.

Eine weitere Fortsetzung würde die Zahl $986 + 15 - 1000 = 1$ und daher nur noch bereits markierte Zahlen erreichen, so daß der Vorgang beendet, ist.

Also werden genau diejenigen der Zahlen markiert, die bei Division durch 15 einen der Reste 1, 6, 11 lassen. Das sind genau diejenigen der Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 1 lassen, d.h. genau die Zahlen 1, $1 \cdot 5 + 1 = 6$, $2 \cdot 5 + 1 = 11$, $3 \cdot 5 + 1 = 16$, ..., $199 \cdot 5 + 1 = 996$.

Ihre Anzahl (wie diese Aufzählung zeigt, zu erhalten als die Anzahl der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... 199) beträgt 200. Also sind genau $1000 - 200 = 800$ Zahlen ohne Markierung geblieben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission