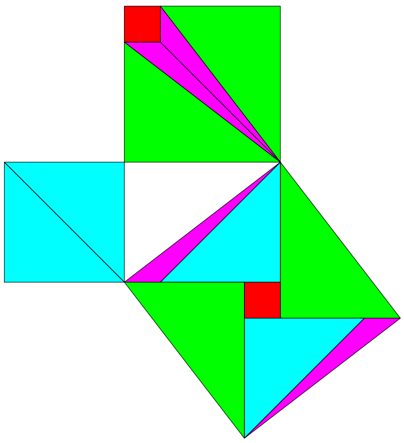
27. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1987/1988

Aufgaben und Lösungen

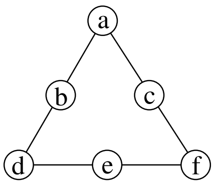


27. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270921:

In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung) sollen für a, b, c, d, e, f die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, daß jede Zahl genau einmal vorkommt und daß auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe entsteht.



Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!

Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

Aufgabe 270922:

Bei einem "ungarischen Dominospiel" mit den Zahlen 0, 1, ..., 9 ist (abgesehen von dieser größeren Zahl in der vom "gewöhnlichen Dominospiel" bekannten Weise) jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Spiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 9 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).

Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel). Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so daß man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).

a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem "ungarischen Dominospiel" gehörenden Steine!

b) Ermitteln Sie die größte Anzahl solcher Steine eines Spiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden läßt!

Aufgabe 270923:

Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit a, b, c bezeichnet, die Länge der Raumdiagonale mit d und der Oberflächeninhalt mit A. Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:

Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3} \cdot (a + b + c)$, wenn $A = 8 \cdot d^2$ gilt.

Aufgabe 270924:

Für je zwei natürliche Zahlen a, b, die die Ungleichungen

$$3a - 2b \leq 10, \qquad (1)$$

$$3a + 8b \leq 25 \qquad (2)$$

erfüllen, sei $S = a + 2b$.

Untersuchen Sie, ob es unter allen Zahlen S, die sich auf diese Weise bilden lassen, eine größte gibt! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie diesen größtmöglichen Wert von S!

27. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 270921:
Es muß gelten:

(1) $a + b + d = a + c + f \Rightarrow b + d = c + f$

(2) $a + b + d = d + e + f \Rightarrow a + b = e + f$

(3) $a + c + f = d + e + f \Rightarrow a + c = d + e$

(4) $a + b + c + d + e + f = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

Aus (1) und (4) folgt: $a + b + c + f + d + e = a + b + d + b + d + e = a + e + 2(b + d) = 21$ bzw. $a + e = 21 - 2(b + d)$. Damit erhält man die Grenzen $5 \leq b + d \leq 9$, da $a + e \leq 5 + 6 = 11 = 21 - 2 \cdot 5$ und $a + e \geq 1 + 2 = 3 = 21 - 2 \cdot 9$.

Es ergeben sich nun die folgenden Fälle:

$b + d$	$= c + f$	$a + e$
1 + 4	2 + 3	5 + 6
1 + 5	2 + 4	3 + 6
1 + 6	2 + 5	3 + 4
1 + 6	3 + 4	2 + 5
2 + 5	3 + 4	1 + 6
2 + 6	3 + 5	1 + 4
3 + 6	4 + 5	1 + 2

Alle nicht aufgeführten Fälle sind symmetrisch (da b+d und c+f symmetrisch liegen). Die nachfolgend angegebenen Bilder stellen die Lösungen dar.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Felix Kaschura

Lösung 270922:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 270923:

Vor: Quader mit den Kantenlängen a, b, c
d sei die Raumdiagonale

A sei die Oberfläche
(a) $d = \frac{1}{3} \cdot (a+b+c)$
(b) $A = 8 \cdot d^2$

Beh: (a) $A = 8 \cdot d^2$
(b) $d = \frac{1}{3} \cdot (a+b+c)$

Bew: Teil (a)

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{3} \cdot (a+b+c) \\ 3 \cdot d &= a+b+c \\ 9 \cdot d^2 &= (a+b+c)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \qquad (1) \end{aligned}$$

Die Raumdiagonale d berechnet sich wie folgt: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (2). Schließlich ergibt sich aus (1) - (2): $8 \cdot d^2 = 2 \cdot (ab + bc + ac)$ (3). Mit der Formel für die Oberfläche: $A = 2 \cdot (ab + bc + ac)$ gilt die Behauptung: $A = 8 \cdot d^2$ □

Bew: Teil (b)
Wegen der Umkehrbarkeit der Operationen ergibt sich die Behauptung analog zum Teil (a) in umgekehrter Reihenfolge. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Volker Pöschel

Lösung 270924:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt