# 27. Mathematik Olympiade
# 2. Stufe (Kreisolympiade)
# Klasse 7
# Saison 1987/1988

Aufgaben und Lösungen

# 27. Mathematik-Olympiade
## 2. Stufe (Kreisolympiade)
## Klasse 7
## Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270721:

Jörg unternahm in den Ferien mit seinem Fahrrad eine Dreitagewanderung. Er legte dabei am ersten Tag die Hälfte und am zweiten Tag ein Drittel der Länge der für alle drei Tage geplanten Wanderstrecke zurück. Am zweiten Tag war Jörg 24 km weniger gefahren als am ersten Tag.

Ermittle die Länge der Wegstrecke, die Jörg noch für den dritten Tag verblieb!

Aufgabe 270722:

Angela, Bodo, Constanze und Dietmar sprechen über den Ausgang zweier Fußballspiele der Klasse 7a gegen die Klasse 7b. Zu beiden Spielen machen sie dieselben Aussagen, nämlich:

| | |
|---|---|
| Angela: | Das Spiel endete unentschieden. |
| Bodo: | Die Klasse 7a gewann. |
| Constanze: | Bodos Aussage ist falsch. |
| Dietmar: | Angelas Aussage ist wahr. |

(a) Petra, die das erste Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, daß für das erste Spiel genau eine der vier Aussagen falsch ist.

(b) Rolf, der das zweite Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, daß für das zweite Spiel genau eine der vier Aussagen wahr ist.

Untersuche, ob sich (a) aus Petras Feststellung, (b) aus Rolfs Feststellung der Ausgang des betreffenden Spiels (Sieg der 7a, Sieg der 7b oder Unentschieden) eindeutig ermitteln läßt!

Aufgabe 270723:

Die Maßzahlen zweier Seitenlängen eines Dreiecks seien $a = 12$ und $b = 8$.

Ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Maßzahl $c$ der dritten Dreiecksseite so vorkommen können, daß die Maßzahl des Umfangs eine Primzahl ist. Alle drei Seitenlängen sollen dabei in derselben Maßeinheit, etwa in Zentimetern, gemessen sein.

Aufgabe 270724:

Es sei $AB$ der Durchmesser eines Kreises, der Mittelpunkt des Kreises sei $M$, ferner sei $C$ ein Punkt, der so auf dem Kreis liegt, daß der Winkel $\sphericalangle BMC$

(a) die Größe 42°,

(b) eine beliebig vorgegebene Größe $\rho$ mit $0° < \rho < 180°$ hat.

Ermittle jeweils aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle ACM$ und die des Winkels $\sphericalangle ACB$!

# 27. Mathematik-Olympiade
# 2. Stufe (Kreisolympiade)
# Klasse 7
# Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 270721:

Aus $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ folgt, daß Jörg am ersten Tag $\frac{1}{6}$ des für alle drei Tage geplanten Weges mehr zurücklegte als am zweiten Tag. Da $6 \cdot 24 = 144$ ist, betrug die gesamte Wanderstrecke 144 km.

Am ersten Tag legte Jörg somit 144 km : 2 = 72 km, am zweiten Tag 144 km : 3 = 48 km zurück. Damit verblieben Jörg für den dritten Tag wegen $144 - 72 - 48 = 24$ noch 24 km.

*Anderer Lösungsweg:* Aus der letzten Angabe im Aufgabentext folgt: 24 km und der Weg des zweiten Tages ergeben zusammen eine halbe Gesamtlänge (nämlich den Weg des ersten Tages; nach der hierüber gemachten Angabe im Aufgabentext).

Es gilt aber auch: Der Weg des dritten Tages und der Weg des zweiten Tages ergeben zusammen eine halbe Gesamtlänge (nämlich die am ersten Tag nicht zurückgelegte Hälfte, da die Wanderung nur die drei Tage umfaßte).

Aus beiden Feststellungen folgt sofort: Der Weg des dritten Tages beträgt 24 km.

*Hinweis zur Korrektur:* Eine Probe (Bestätigung, daß 72 km, 48 km, 24 km alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen) bzw. - bei Ansätzen nach Art des zweiten Lösungsweges - überhaupt eine Angabe der Weglängen 72 km, 48 km ist nicht zu einer vollständigen Lösung erforderlich, da die Existenz von Weglängen, die alle Bedingungen erfüllen, dem Aufgabentext entnommen werden kann.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 270722:

(a) Wäre Dietmars Aussage falsch, dann wäre auch Angelas Aussage falsch. Da nach Petras Feststellung aber nur genau eine Aussage falsch ist, folgt eindeutig, daß Dietmars und damit auch Angelas Aussage wahr ist. Daraus folgt eindeutig: Das erste Spiel endete unentschieden.

(b) Wenn Klasse 7a das zweite Spiel gewann, so ist Bodos Aussage wahr und folglich Constanzes Aussage falsch; ferner ist dann Angelas und daher auch Dietmars Aussage falsch. Wann Klasse 7b das zweite Spiel gewann, ist Bodos Aussage falsch und folglich Constanzes Aussage wahr; ferner ist dann Angelas und daher auch Dietmars Aussage falsch.

Da es somit zwei verschiedene Ausgänge des zweiten Spiels gibt, bei denen Rolfs Feststellung zutrifft, läßt sich aus dieser Feststellung der Ausgang des zweiten Spiels nicht eindeutig ermitteln.

*Anderer Lösungsweg:* Die folgende Tabelle zeigt alle Möglichkeiten für den Spielausgang. Bei jeder Möglichkeit ist angegeben, welche Aussage wahr und welche falsch ist.

| Spielausgang | Aussage | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| Sieg 7a | | F | W | F | F |
| Sieg 7b | | F | F | W | F |
| Unentschieden | | W | F | W | W |

Aus der Tabelle ist ersichtlich:

(a) Es gibt nur einen Spielausgang, bei dem drei Aussagen wahr sind und eine falsch ist, d.h. Petras Feststellung zutrifft.

Also läßt sich aus Petras Feststellung der Spielausgang eindeutig ermitteln.

(b) Es gibt mehr als einen Spielausgang, bei dem drei Aussagen falsch sind und eine wahr ist, d.h. Rolfs Feststellung zutrifft.

Also läßt sich aus Rolfs Feststellung der Spielausgang nicht eindeutig ermitteln.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 270723:

Eine Zahl ist genau dann als Maßzahl $c$ der dritten Dreiecksseite möglich, wenn sie $c < a + b$ und $c > a - b$, d.h. $4 < c < 20$ erfüllt.

Für den Umfang

$$u = a + b + c = 20 + c \qquad (1)$$

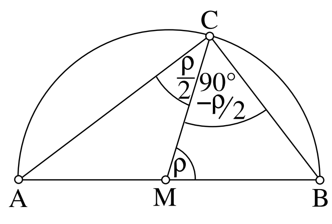
ist dies gleichbedeutend mit $24 < u < 40$.

Das ist genau dann eine Primzahl, wenn $u$ eine der Zahlen 29, 31, 37 ist, und dies wegen (1) genau dann, wenn $c$ eine der Zahlen 9, 11, 17 ist.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 270724:

(b) Aus den Voraussetzungen folgt:




$\overline{MA} = \overline{MC}$ (Radien des Kreises), also

$\overline{\sphericalangle ACM} = \overline{\sphericalangle CAM}$ (Basiswinkel im Dreieck $ACM$).

Hieraus und aus $\overline{\sphericalangle ACM} + \overline{\sphericalangle CAM} = \rho$ (Außenwinkelsatz für Dreieck $ACM$) folgt

$$\overline{\sphericalangle ACM} = \frac{\rho}{2}. \qquad (1)$$

Aus den Voraussetzungen folgt ferner $\overline{MB} = \overline{MC}$ (Radien des Kreises), also $\overline{\sphericalangle BCM} = \overline{\sphericalangle CBM}$ (Basiswinkel im Dreieck $BCM$). Hieraus und aus $\overline{\sphericalangle BCM} + \overline{\sphericalangle CBM} = 180° - \rho$ (Innenwinkelsatz für Dreieck $BCM$) folgt $\overline{\sphericalangle BCM} = 90° - \frac{\rho}{2}$.

Daraus und aus (1) ergibt sich durch Addition

$$\overline{\sphericalangle ACB} = 90°. \qquad (2)$$

Mit (1) und (2) sind die gesuchten Winkelgrößen ermittelt.

(a) Die Lösung zu (a) kann (mit der ebenso ausgeführten Herleitung oder) durch Einsatz von $\rho = 42°$ gefunden werden. Es ergibt sich $\overline{\sphericalangle ACM} = 21°$ und $\overline{\sphericalangle ACB} = 90°$.

*Andere Lösungsmöglichkeiten:* Statt des Außenwinkelsatzes für Dreieck $ACM$ kann der Innenwinkelsatz unter Verwendung von $\overline{\sphericalangle ACM} = 180° - \rho$ (Nebenwinkel) herangezogen werden, ebenso statt des Innenwinkelsatzes für Dreieck $BCM$ der Außenwinkelsatz.

Falls ein Schüler (z.B. aus einer AG) den Satz des Thales kennt und zitiert, kann er damit sogleich zu (2) gelangen, außerdem wie oben $\overline{\sphericalangle BCM} = 90° - \frac{\rho}{2}$ herleiten und dann durch Subtraktion (1) beweisen. Auch dies ist als vollständige Lösungsmöglichkeit zu werten.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

## Quellenverzeichnis

**(25)** Offizielle Lösung der Aufgabenkommission