26. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1986/1987

Aufgaben und Lösungen

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 261221:

Man ermittle alle diejenigen Tripel reeller Zahlen $(x; y; z)$, die Lösung des folgenden Gleichungssystems (1), (2), (3) sind:

$$x \cdot y = 2 \tag{1}$$
$$x \cdot z = 3 \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 = 5 \tag{3}$$

Aufgabe 261222:

Man ermittle alle diejenigen Tripel (p, q, r) von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:

(1) In der Folge aller Primzahlen sind p, q, r in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende Primzahlen.

(2) Die Zahl $s = p^2 + q^2 + r^2$ ist eine Primzahl.

Aufgabe 261223:

In einer Stadt soll ein Wasserballturnier stattfinden, an dem zehn Mannschaften beteiligt sind. Jede Mannschaft spielt in einer Hin- und einer Rückrunde jeweils genau einmal gegen alle anderen.

Zur Verfügung stehen zwei Schwimmhallen, die so weit voneinander entfernt sind, daß im Laufe eines Spieltages kein Übergang einer Mannschaft von einer Halle zur anderen erfolgen kann. Außerdem haben sich folgende Bedingungen als notwendig herausgestellt:

(1) An jedem Spieltag kann jede Mannschaft höchstens zwei Spiele bestreiten.

(2) In jeder Halle sind an jedem Spieltag höchstens fünf Mannschaften anwesend.

(3) Jede Mannschaft kann die Rückrunde erst beginnen, wenn sie alle Spiele der Hinrunde abgeschlossen hat.

Bei der Planung des Turniers wurde zunächst ein Spielplan aufgestellt, nach dem das Turnier in 10 Tagen durchgeführt werden kann.

Man untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch möglich ist, das Turnier in 9 Tagen durchzuführen.

Aufgabe 261224:

Zwei Kreise k_1, k_2 seien so gelegen, daß sie sich in zwei verschiedenen Punkten A, B schneiden und daß die Verbindungsstrecke M_1M_2 der beiden Kreismittelpunkte von der Strecke AB in einem Punkte geschnitten wird, der zwischen M_1 und M_2 liegt. Unter allen denjenigen Geraden, die durch A gehen und außerdem sowohl den Kreis k_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt P als auch den Kreis k_2 in einem von A und B verschiedenen Punkt Q schneiden, wird nun eine Gerade gesucht, für die die Strecke PQ möglichst lang ist.

Man untersuche, ob es eine solche Gerade gibt, ob sie dann durch die Kreise k_1, k_2 eindeutig bestimmt ist und, wenn dies der Fall ist, welche Lage diese Gerade dann hat.

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 261321:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 261322:

I. Wenn p, q, r ein Tripel ist, das die Bedingungen (1), (2) erfüllt, so folgt (p, q, r) ist nicht das Tripel (2, 3, 5); denn dieses erfüllt wegen $2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$ nicht die Bedingung (2).

   Ferner folgt: (p, q, r) ist kein Tripel mit $p > 3$ (also auch $q > 3$, $r > 3$); denn jede Primzahl, die größer als 3 ist, läßt bei Division durch 3 entweder den Rest 1 oder den Rest 2, ihr Quadrat läßt also in beiden Fällen den Rest 1;

   Für jedes Tripel (p, q, r) von Primzahlen $p, q, r > 3$ ist somit $p^2 + q^2 + r^2$ durch 3 teilbar (und größer als 3), also keine Primzahl.

   Nach (1) verbleibt daher nur die Möglichkeit, daß p, q, r das Tripel (3, 5, 7) ist.

II. Dieses Tripel erfüllt als Tripel dreier aufeinanderfolgender Primzahlen die Bedingung (1), und wegen $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ auch die Bedingung (2).

Mit I. und II. ist gezeigt, daß genau das Tripel (3, 5, 7) die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 261323:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 261324:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission