26. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1986/1987

Aufgaben und Lösungen

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260721:

Anne, Bernd und Peter helfen im Garten bei der Apfelernte. Alle drei benutzen Körbe gleicher Größe. Anne benötigt 10 Minuten, um einen Korb zu füllen, Bernd braucht dafür 15 Minuten und der kleine Peter sogar 30 Minuten.

Wie lange würde es dauern, bis die drei Kinder gemeinsam einen Korb gefüllt hätten? Wir setzen voraus, daß sich für keinen der drei Helfer die Pflückgeschwindigkeit ändert.

Aufgabe 260722:

Klaus lernte im Mathematik-Spezialistenlager Dorit kennen und fragte sie nach ihrem Alter. Sie antwortete: "Ich wurde im Mai desjenigen Jahres 10 Jahre alt, dessen Jahreszahl die kleinste durch 7 teilbare Zahl ist, die bei Division durch 2, 3, 5 und 11 jeweils den Rest 1 läßt."

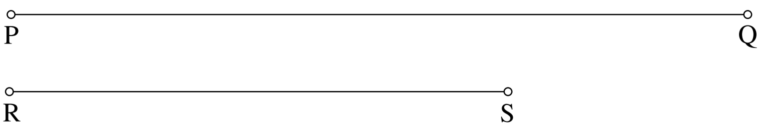
Untersuche, ob Klaus aus dieser Antwort Dorits Alter eindeutig ermitteln konnte. Ist dies der Fall, dann gib an, wie alt (in vollen Lebensjahren gerechnet) Dorit im Juni 1986 ist!

Aufgabe 260723:

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$. Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle DAB$ schneide die Seite CD in einem inneren Punkt E. Die Parallele durch E zu AD schneide AB in F.

Beweise, daß das Viereck $AFED$ ein Rhombus ist!

Aufgabe 260724:



Zu zwei gegebenen Streckenlängen $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ (siehe Abbildung) gibt es zwei weitere Streckenlängen a und b, die die Bedingungen

(1) $\overline{PQ} = 2a + b$,

(2) $\overline{RS} = 2a - b$

erfüllen und durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt sind.

Sie sollen auf zwei verschiedene Weisen ermittelt werden:

(a) Übertrage $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ auf ein Zeichenblatt und *konstruiere* (ohne Verwendung einer Längenskala) aus diesen gegebenen Längen die gesuchten a und b! Beschreibe deine Konstruktion! Begründe, warum die Aufgabe (1) und (2) zu erfüllen, durch deine Konstruktion gelöst wird!

(b) Ermittle a und b *rechnerisch*, wenn die gegebenen Längen $\overline{PQ} = 9,8$ cm und $\overline{RS} = 6,6$ cm betragen!

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 260721:

Anne hat in einer Minute $\frac{1}{10}$ ihres Korbes gefüllt, Bernd $\frac{1}{15}$ und Peter $\frac{1}{30}$. Alle zusammen haben nach einer Minute also

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

eines Korbes gefüllt. Sie brauchen somit zusammen 5 Minuten, um einen Korb gemeinsam zu füllen.

Lösung von Nico Wiedensohler, 8 Jahre, Klasse 3:

5 Minuten.

Begründung: In 30 Minuten füllt Anne 3 Körbe, Bernd 2 und Peter 1. 30 Minuten für 6 Körbe sind 5 Minuten für einen Korb.

Aufgeschrieben und gelöst von Heike Winkelvoß

Lösung 260722:

Dorit sei im Jahre x zehn Jahre alt geworden. Dann ist $x-1$ eine natürliche Zahl, die durch 2, 3, 5 und 11 teilbar ist. Diese vier Teilbarkeitsaussagen gelten genau dann, wenn $x-1$ ein Vielfaches des k.g.V. dieser vier Zahlen ist. Das ist gleichbedeutend damit, daß mit einer natürlichen Zahl n

$$x-1=330\cdot n,$$
$$\text{d.h. } x=330\cdot n+1 \text{ gilt.}$$

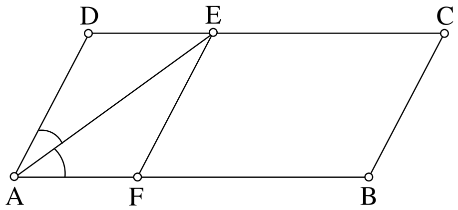
Da 330 bei Division durch 7 den Rest 1, also $330\cdot 2$ den Rest 2, $330\cdot 3$ den Rest 3 u.s.w. läßt, führt $n=6$ auf die kleinste Zahl x, die (außer den genannten Teilbarkeitsaussagen für $x-1$) auch die Bedingung erfüllt, durch 7 teilbar zu sein.

Daraus folgt $x=330\cdot 6+1=1981$; d.h., aus Dorits Antwort läßt sich eindeutig ermitteln:

Dorit wurde im Mai des Jahres 1981 zehn Jahre alt; im Juni 1986 ist sie mithin 15 Jahre alt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 260723:



Nach Voraussetzung ist $AB \parallel CD$ und $FE \parallel AD$, somit ist das Viereck $AFED$ ein Parallelogramm mit $\overline{AF}=\overline{DE}$ und $\overline{AD}=\overline{EF}$.

Da der Winkel $\sphericalangle DAF$ durch AE halbiert wird, gilt $\overline{\sphericalangle DAE}=\overline{\sphericalangle EAF}$.

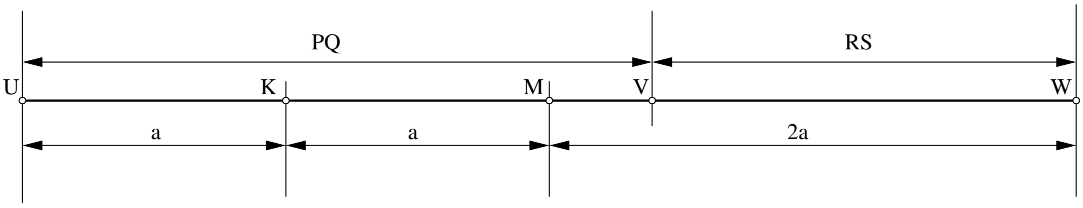
Außerdem sind die Winkel $\sphericalangle EAF$ und $\sphericalangle AED$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen und somit gleichgroß.

Damit gilt $\overline{\sphericalangle DAE} = \overline{\sphericalangle EAF} = \overline{\sphericalangle AED}$, und das Dreieck AED ist nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig mit $\overline{AD} = \overline{DE}$. Also ist $\overline{AF} = \overline{DE} = \overline{AD} = \overline{EF}$, d.h., das Parallelogramm $AFED$ hat vier gleichlange Seiten und ist damit ein Rhombus.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 260724:

(a) I. Konstruktion:



II. Beschreibung:

1. Man konstruiert eine Strecke UV der Länge $\overline{UV} = \overline{PQ}$.
2. Man verlängert UV über V hinaus um $\overline{RS}$ bis zum Punkt W.
3. Man konstruiert den Mittelpunkt M der Strecke UW.
4. Man konstruiert den Mittelpunkt K der Strecke UM.

Dann sind $\overline{UK} = a$ und $\overline{MV} = b$ die gesuchten Längen.

III. Begründung:

Für die so konstruierten Längen gilt: Nach 4. ist $\overline{UM} = 2 \cdot \overline{UK} = 2a$; hieraus und aus 1. folgt $\overline{PQ} = \overline{UV} = \overline{UM} + \overline{MV} = 2a + b$, d.h., (1) ist erfüllt.

Nach 3. ist ferner $\overline{MW} = \overline{UM} = 2a$; hieraus und aus 2. folgt $\overline{RS} = \overline{VW} = \overline{MW} - \overline{MV} = 2a - b$, d.h., (2) ist erfüllt.

(b) Aus (1) und (2), d.h.

$$2a + b = 9,8 \text{ cm} \tag{3}$$

$$\text{und } 2a - b = 6,6 \text{ cm}, \tag{4}$$

folgt durch Addition $4a = 16,4$ cm, also $a = 4,1$ cm. Hieraus und aus (3) folgt $b = 9,8 \text{ cm} - 8,2 \text{ cm} = 1,6$ cm.

Andere Lösungsmöglichkeiten:

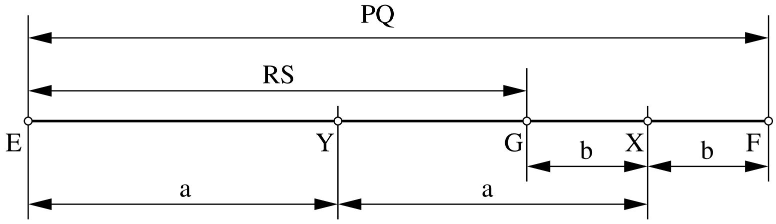
Zu (a) III.:

Statt der angeführten Schlußweise ("Wenn a und b wie in II. konstruiert werden, dann erfüllen sie (1) und (2)") kann auch umgekehrt geschlossen werden: Wenn a und b die Bedingungen (1) und (2) erfüllen, ist ihre Summe gleich $4a$, also führen dann die Konstruktionsschritte II.1., 2. auf $\overline{UW} = 4a$. Daher führt das zweimalige Halbieren II.3., 4. auf $\overline{UM} = 2a$ und $\overline{UK} = a$, und wegen (1) ist ferner $\overline{UV} = 2a + b$, also $\overline{MV} = \overline{UV} - \overline{UM} = b$.

Zu (b):

Statt der angeführten Schlußweise ("Wenn a und b die Bedingungen (1) und (2) erfüllen, dann ist $a = 4,1$ cm und $b = 1,6$ cm") kann auch $a = 4,1$ cm und $b = 1,6$ cm (z.B. durch Messen in II. oder durch Probieren vermutet und) vorausgesetzt werden, und dann wird nachgewiesen, daß diese Längen (1) und (2) erfüllen, da für sie $2a + b = 2 \cdot 4,1$ cm $+ 1,6$ cm $= 9,8$ cm und $2a - b = 2 \cdot 4,1$ cm $- 1,6$ cm $= 6,6$ cm gilt.

Zu (a) sind insgesamt auch andere Konstruktionen möglich, z.B. wie in der Abbildung. (Aus $\overline{EF} = \overline{PQ}$, $\overline{EG} = \overline{RS}$ konstruiert man X als Mittelpunkt von GF und Y als Mittelpunkt von EX; dann wird $\overline{EY} = \overline{YX} = a$, $\overline{GX} = \overline{XF} = b$.) Die Lösungsteile II. und III. (zwei mögliche Schlußweisen) sind dann entsprechend anzuschließen.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission