26. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Saison 1986/1987

Aufgaben und Lösungen

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260621:

Bei der folgenden fünfstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt.

2 7 * * 7

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, daß die Zahl durch 9 teilbar ist.

Gib alle fünfstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können! Weise nach, daß alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

Aufgabe 260622:

Die Mädchen Britta, Petra und Anja wünschen sich einen Ball, eine Puppe und ein Album für Briefmarken. Dabei wünscht sich jedes der Mädchen genau einen der genannten Gegenstände, und zwar jedes Mädchen einen anderen. Marie soll feststellen, wer von den Mädchen sich welchen Gegenstand wünscht. Auf ihre Frage erhält sie folgende Antworten:

(1) Britta wünscht sich den Ball.

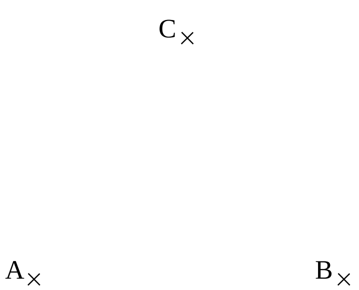
(2) Petra wünscht sich den Ball nicht.

(3) Anja wünscht sich das Album nicht.

Von diesen drei Antworten ist genau eine wahr, die anderen beiden sind falsch. Wenn man das weiß, kann man für jedes der drei Mädchen eindeutig feststellen, welchen Gegenstand es sich wünscht.

Erkläre, wie sich diese Feststellungen gewinnen lassen und gib die Feststellungen an!

Aufgabe 260623:



Es seien A, B, C die drei in der Abbildung gegebenen Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

a) Konstruiere (mindestens) zwei Punkte S_1 und S_2, für die $\overline{S_1A} = \overline{S_1B}$ und $\overline{S_2A} = \overline{S_2B}$ gilt!

b) Es gibt genau einen Punkt S, der von A, B und C gleich weit entfernt ist. Konstruiere diesen Punkt S!

c) Begründe, warum der Punkt S bei deiner Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 260624:

Der Schüler Frank Schludrig meint, über seine Klasse folgendes herausgefunden zu haben:

In der Klasse sind genau 28 Schüler, davon sind genau 16 Jungen. An Arbeitsgemeinschaften nehmen genau 20 Schüler der Klasse teil, davon sind genau 8 Jungen. An der Kreisolympiade Junger Mathematiker beteiligten sich genau 4 Schüler der Klasse, davon waren genau 2 Jungen. Von diesen Olympiadeteilnehmern sind genau 1 Junge und genau 1 Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft.

Der Schüler Rolf Schlauberger hört sich diese Angaben an und behauptet nach einigem Überlegen, daß Frank Schludrig ein Irrtum unterlaufen sein muß.

Weise nach, daß die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen können!

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 260621:

Durch Einfügen zweier Ziffern anstelle der Sternchen entsteht genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Summe der zwei eingefügten Ziffern 2 oder 11 beträgt. Folglich ergibt sich genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn die beiden Sternchen in dieser Reihenfolge durch die Ziffern

0,2	bzw. 2,9
bzw. 1,1	bzw. 3,8
bzw. 2,0	bzw. 4,7
	bzw. 5,6
	bzw. 7,4
	bzw. 8,3
	bzw. 9,2

ersetzt werden.

Die gesuchten Zahlen lauten mithin

27027, 27117, 27207, 27297, 27387, 27477, 27567, 27657, 27747, 27837 und 27927.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 260622:

Wir unterscheiden drei Fälle, je nachdem welche von den drei Antworten wahr ist:

1. Angenommen, die Antwort (1) wäre wahr, die Antworten (2) und (3) wären also falsch. Dieser Fall kann nicht eintreten, weil sich dann nämlich Britta und Petra beide den Ball wünschen würden.

2. Angenommen, die Antwort (2) wäre wahr und die Antworten (1) und (3) wären falsch. Dieser Fall kann nicht eintraten; denn dann würden sich weder Petra noch Britta den Ball wünschen, aber auch Anja nicht (da sie sich das Album wünschen würde.) Also muß der folgende Fall zutreffen:

3. Die Antwort (3) ist wahr und die Antworten (1) und (2) sind falsch.

   Daß (2) falsch ist, besagt:

   Petra wünscht sich den Ball

   (in Übereinstimmung damit, daß auch (1) falsch ist). Anja wünscht sich also nicht den Ball; und daß (3) wahr ist, bedeutet folglich nunmehr eindeutig:

Anja wünscht sich die Puppe,
Britta wünscht sich das Album (letzteres ebenfalls in Übereinstimmung damit, daß (1) falsch ist).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 260623:

a) Eine mögliche Konstruktion ist die folgende (siehe Abbildung; eine Beschreibung wird vom Schüler nicht verlangt):

Wir zeichnen um A und um B je einen Kreis mit dem gleichen Radius r, der größer als $\frac{1}{2}\overline{AB}$ und sonst beliebig gewählt wird. Die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 dieser beiden Kreise erfüllen die Bedingung $\overline{S_1A} = \overline{S_1B}$ und $\overline{S_2A} = \overline{S_2B}$.

b) In entsprechender Weise konstruieren wir für die Punkte A und C zwei Punkte S_3, und S_4, für die $\overline{S_3A} = \overline{S_3C}$ und $\overline{S_4A} = \overline{S_4C}$ gilt. Der Schnittpunkt S der Geraden durch S_1, S_2 und der Geraden durch S_3, S_4 erfüllt die geforderten Bedingungen.

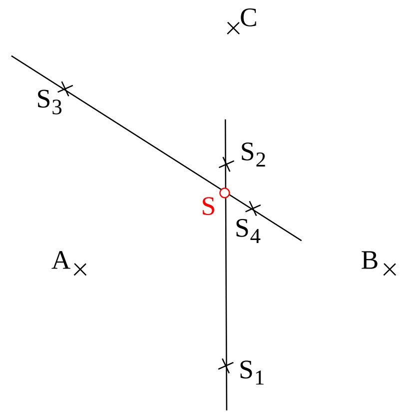
c) Nach Konstruktion ist die Gerade durch S_1, S_2 Symmetrieachse zu A, B, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von A wie von B entfernt sind.

Ferner ist die Gerade durch S_3, S_4 Symmetrieachse zu A, C, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von A wie von C entfernt sind.

Nach Konstruktion ist S ein Punkt beider Symmetrieachsen. Deshalb gilt für ihn:

$$\overline{SA} = \overline{SB} \text{ und } \overline{SA} = \overline{SC}$$

und damit auch $\overline{SB} = \overline{SC}$, d. h., S ist von A, B und C gleich weit entfernt.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 260624:
Aufgrund der Gesamtzahl der Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften (20) und der Zahl der Jungen unter ihnen (8) und wegen $20 - 8 = 12$ müßte es in der Klasse 12 Mädchen geben, die in Arbeitsgemeinschaften tätig sind.

Aufgrund der Gesamtzahl der Olympiadeteilnehmer (4) und der Zahl der Jungen unter ihnen (2) und wegen $4 - 2 = 2$ müßte es in der Klasse genau 2 Mädchen geben, die an der Olympiade teilgenommen haben. Es wird nun ausgesagt, daß genau eines dieser Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft ist. Also folgt aus den Angaben, daß es außer 12 Mädchen, die Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften sind, noch ein weiteres Mädchen in der Klasse geben müßte. Da somit die Zahl der Mädchen in der Klasse mindestens 13 sein würde, die Zahl der Jungen mit 16 angegeben wird, $13 + 16 = 29$ ist, die Klasse aber nur 28 Schüler umfassen soll, können die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission