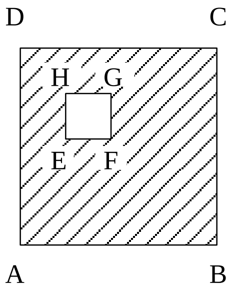
26. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1986/1987

Aufgaben und Lösungen

26. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260611:



In ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 8 cm ist ein Quadrat $EFGH$ mit der Seitenlänge 2 cm so eingezeichnet, wie es das Bild zeigt. HG und DC sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander. EH und AD sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander.

a) Berechne den Flächeninhalt der im Bild schraffierten Fläche!

b) Die schraffierte Fläche soll in fünf Teile zerlegt werden. Diese Teile sollen so gestaltet sein, daß man je zwei von ihnen durch Drehen oder Verschieben miteinander zur Deckung bringen kann. Zeichne eine solche Aufteilung der schraffierten Fläche!

Aufgabe 260612:

Zur Durchführung eines Geländespiels war es nötig, daß jeder Teilnehmer ein Schreibgerät bei sich hatte. Es waren nur folgende Sorten Schreibgeräte von Teilnehmern mitgebracht worden. Kugelschreiber, Rotstifte und Grünstifte; keine dieser drei Sorten kam doppelt bei einem der Teilnehmer vor. Im einzelnen wurde festgestellt:

(1) Es waren insgesamt 100 Teilnehmer bei diesen Geländespiel.

(2) Genau 20 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Rotstift.

(3) Genau 15 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Grünstift.

(4) Genau 5 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber weder einen Rotstift noch einen Grünstift.

(5) Genau 65 der Teilnehmer hatten keinen Kugelschreiber.

(6) Genau 55 der Teilnehmer hatten keinen Rotstift.

(7) Genau 40 der Teilnehmer hatten keinen Grünstift.

(8) Genau 15 der Teilnehmer hatten weder einen Rotstift noch einen Grünstift.

a) Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl derjenigen Teilnehmer, die wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht hatten!

b) Reichten die mitgebrachten Schreibgeräte aus, um bei geeigneter Verteilung jeden der 100 Teilnehmer mit einem Schreibgerät zu versorgen?

Aufgabe 260613:

Die Verbindungsstraßen dreier Orte A, B, C bilden ein Dreieck. In der Mitte der Verbindungsstraße von B nach C liegt ein weiterer Ort D. Von A über B nach C beträgt die Entfernung 25 km, von B über C nach A dagegen 27 km und von C über A nach B schließlich 28 km. Eine Pioniergruppe wandert auf den genannten Straßen auf kürzestem Wege vom Ort A zum Ort D.

a) Über welchen der beiden Orte B oder C läuft die Pioniergruppe? Begründe deine Entscheidung!

b) Wieviel Zeit spart sie gegenüber dem längeren der beiden möglichen Wege von A nach D ein, wenn sie stündlich 4 km zurücklegt?

c) Wie lang ist der von ihr insgesamt zurückgelegte Weg?

Aufgabe 260614:

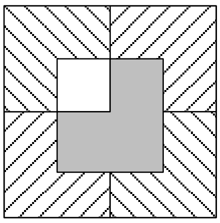
Auf einem Kreis werden wie beim Zifferblatt einer Uhr zwölf Punkte eingetragen. Auf jeden der Punkte wird genau ein Spielstein gelegt. Zwei Spieler A und B sollen abwechselnd jeweils entweder genau einen Stein oder genau zwei Steine, die auf benachbarten Punkten liegen, wegnehmen. Spieler A beginnt. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Spielstein wegnimmt.

Wie kann Spieler B vorgehen, um in jedem Fall zu gewinnen?

26. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 260611:



a) Die Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ haben wegen $8 \cdot 8 = 64$ und $2 \cdot 2 = 4$ die Flächeninhalte $64\,\text{cm}^2$ bzw. $4\,\text{cm}^2$. Somit besitzt die schraffierte Fläche wegen $64 - 4 = 60$ den Flächeninhalt $60\,\text{cm}^2$.

b) Die Abbildung zeigt eine mögliche Lösung der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 260612:

a) Unter den 15 in (8) genannten Teilnehmern ohne Rot- und Grünstift befanden sich auch die 5 in (4) genannten Teilnehmer (ohne Rot- und Grünstift, aber) mit Kugelschreiber; die anderen 10 hatten folglich überhaupt kein Schreibgerät.

   Aus (8) und (1) folgt ferner: Alle 85 in (8) nicht genannten Teilnehmer hatten ein Schreibgerät (nämlich mindestens eines der Geräte Rot- oder Grünstift). Also hatten nur die genannten 10 Teilnehmer kein Schreibgerät.

   Damit ist gezeigt: Genau 90 der Teilnehmer hatten wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht.

b) Unter den 20 in (2) genannten sämtlichen Teilnehmern mit Kugelschreiber, aber ohne Rotstift befanden sich auch die 5 in (4) genannten (mit Kugelschreiber, ohne Rotstift und) ohne Grünstift; die anderen 15 hatten folglich außer dem Kugelschreiber einen Grünstift mitgebracht. Daraus folgt:

   Die mitgebrachten Schreibgeräte reichten aus, um alle Teilnehmer zu versorgen. Es genügte z.B., 10 der genannten Grünstifte an die in a) ermittelten Teilnehmer ohne mitgebrachtes Schreibgerät zu verteilen.

Hinweis: Zur Lösung der Aufgaben a) und b) wurden nicht alle Angaben (1) bis (8) benötigt. Derartige Aufgaben, bei denen mehr Forderungen gestellt werden, als zum Auffinden der Lösung nötig wären, heißen "überbestimmt". Man kann dann untersuchen, ob aus den gegebenen Forderungen noch mehr Zahlen ermittelt werden können; zu prüfen ist auch, ob sämtliche gestellten Forderungen überhaupt miteinander vereinbar sind.

Versuche z.B., aus den Angaben (1) bis (8) folgende Zahlen zu ermitteln:

Genau 5 der Teilnehmer hatten Kugelschreiber, Rot- und Grünstift.
Genau 10 der Teilnehmer hatten Kugelschreiber und Rotstift, aber keinen Grünstift.

Genau 15 der Teilnehmer hatten Kugelschreiber und Grünstift, aber keinen Rotstift.
Genau 15 der Teilnehmer hatten Rot- und Grünstift, aber keinen Kugelschreiber.
Genau 15 der Teilnehmer hatten einen Rotstift, aber weder Kugelschreiber noch Grünstift.
Genau 25 der Teilnehmer hatten einen Grünstift, aber weder Kugelschreiber noch Rotstift.

Überprüfe, ob durch diese und die in a) und b) gefundenen Ergebnisse tatsächlich alle Aussagen (1) bis (8) erfüllt werden! Suche selbst weitere Zahlen, z.B.: Wieviel Schreibgeräte hatten die Teilnehmer insgesamt mitgebracht?

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 260613:

a) Wegen $\overline{AB} + \overline{BC} = 25\,\text{km}$ und $\overline{AC} + \overline{BC} = 27\,\text{km}$ ist $\overline{AC}$ um 2 km länger als $\overline{AB}$. Damit ist wegen $\overline{CD} = \overline{BD}$ eine Wanderung von A über C nach D um 2 km länger als eine Wanderung von A über B nach D.

   Weil die Pioniergruppe den kürzeren der beiden Wege wählte, läuft sie über den Ort B.

b) Nach den Überlegungen zu a) spart die Pioniergruppe auf dam kürzeren Wege von A nach D gegenüber dem längeren Wege 2 km ein. Wenn sie stündlich 4 km zurücklegt, benötigt sie für 2 km eine halbe Stunde. Sie spart damit bei einer Wanderung von A nach D auf dem kürzeren Wege gegenüber einer auf dem längeren Wege $\frac{1}{2}$ Stunde ein.

c) Würde man hintereinander von A über B nach C, dann von C über A nach B und dann von B über C nach A laufen, so würde man zweimal den Umfang des Dreiecks ABC durchlaufen und wegen $25+28+27 = 80$ insgesamt 80 km zurücklegen. Folglich ist wegen $80 : 2 = 40$ der Umfang des Dreiecks ABC gleich 40 km. Subtrahiert man von ihm $\overline{AC} + \overline{BC} = 27\,\text{km}$, so verbleibt

$$\overline{AB} = 40\,\text{km} - 27\,\text{km} = 13\,\text{km}.$$

   Subtrahiert man vom Umfang aber $\overline{AC} + \overline{AB} = 28\,\text{km}$, so verbleibt

$$\overline{BC} = 40\,\text{km} - 28\,\text{km} = 12\,\text{km}.$$

   Daher ist

$$\overline{BD} = 12\,\text{km} : 2 = 6\,\text{km}.$$

   Der gesuchte Weg beträgt folglich

$$\overline{AB} + \overline{BD} = 13\,\text{km} + 6\,\text{km} = 19\,\text{km}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 260614:
Spieler B kann die Axialsymmetrie der Figur ausnutzen.

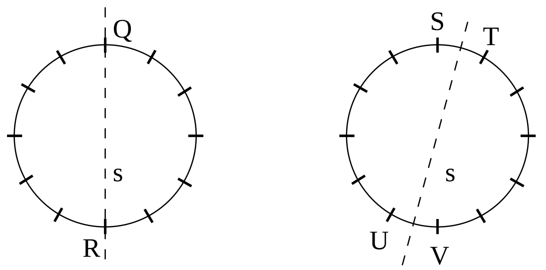
Für den ersten Zug von Spieler A sind genau die folgenden zwei Fälle möglicht

1. Spieler A nimmt nur einen Stein weg, wir bezeichnen ihn mit Q. Dann wählt Spieler B als Symmetrieachse s der Figur diejenige Symmetrieachse, die durch Q geht. Auf s liegt noch ein Stein R. Diesen nimmt Spieler B in seinem ersten Zug weg.

2. Spieler A nimmt zwei nebeneinanderliegende Steine S und T weg. Dann wählt Spieler B als Symmetrieachse s der Figur diejenige Symmetrieachse, die zwischen S und T verläuft. Die Gerade s verläuft dann noch zwischen zwei weiteren nebeneinanderliegenden Steinen U und V. Diese nimmt Spieler B in seinem ersten Zug weg.

Nach dem ersten Zug von Spieler B liegen zwei zueinander bezüglich s symmetrische Steine niemals nebeneinander, sondern sind durch mindestens einen Punkt ohne Spielstein voneinander getrennt. Daher kann Spieler A niemals in einem Zug gleichzeitig einen Stein P und den zu ihm bezüglich s symmetrisch gelegenen Stein P' wegnehmen.

Folglich wird Spieler B in jedem Fall zum Wegnehmen des letzten Steines, also zum Gewinn, kommen, wenn er zu jedem Stein, den Spieler A wegnimmt, im Gegenzug den bezüglich s symmetrisch gelegenen Stein wegnimmt.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Quellenverzeichnis

(31) Broschüre vom Volk und Wissen Verlag (VWV)