25. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1985/1986

Aufgaben und Lösungen

25. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250731:

Ermittle zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die Teiler der Zahl 2^n sind!

Aufgabe 250732:

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{CA} = 4$ cm, $\overline{CB} = 20$ cm. Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, daß sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:

a) Die Strecke CB kann um x cm verkürzt werden; d.h. zwischen C und B liegt ein Punkt B' mit $\overline{CB'} = \overline{CB} - x$ cm.

b) Wenn zugleich die Strecke CA über A hinaus um x cm bis zu einem Punkt A' verlängert wird, dann beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C$ genau 55% des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

Untersuche, ob es genau eine natürliche Zahl x gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

Aufgabe 250733:

Für ein Viereck $ABCD$ werden die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

(1) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

(2) Die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt E, der auf der Geraden durch C und D liegt.

(3) Es gilt $\overline{AE} = 6,0$ cm und $\overline{BE} = 4,0$ cm.

a) Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, das diese Bedingungen erfüllt, aus den gegebenen Längen $6,0$ cm und $4,0$ cm konstruiert werden kann!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

Aufgabe 250734:

Ein Jagdflugzeug flog in einer halben Stunde 200 km weiter als ein Sportflugzeug in einer Stunde.

Wie groß war die Geschwindigkeit jedes dieser beiden Flugzeuge, wenn die des Jagdflugzeuges dreimal so groß war wie die des Sportflugzeugs?

Aufgabe 250735:

In einer Arbeitsgemeinschaft stellt Rainer seinen Klassenkameraden folgendermaßen eine Aufgabe:

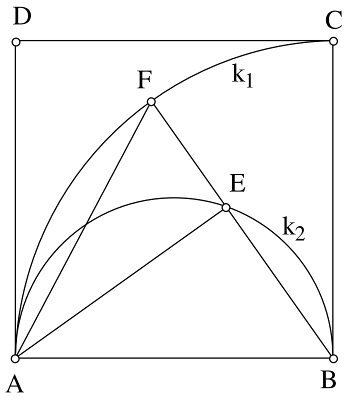
Er nimmt drei Karten, auf denen zweiziffrige Zahlen stehen, so in die Hand, daß niemand anders als er die Zahlen sehen kann und daß sich die dreimal zwei Ziffern nebeneinandergehalten als eine sechsstellige Zahl lesen lassen. Dies macht er (mit denselben Karten) mehrere Male, bis er jede mögliche Reihenfolge der drei Karten genau einmal berücksichtigt hat. Die abgelesene sechsstellige Zahl notiert er jedesmal (ebenfalls so, daß nur er seine Notizen sehen kann). Anschließend bildet er die Summe aller notierten Zahlen.

Nun teilt er den Klassenkameraden mit:

"Auf einer Karte steht die Zahl 15, auf einer die Zahl 23. Auf der dritten Karte steht eine zweistellige Zahl, die ich nicht verrate. Die Summe aller notierten Zahlen beträgt 1 373 736."

Untersuche, ob es genau eine zweistellige Zahl gibt, die unter den genannten Bedingungen nach Rainers Aussagen auf der dritten Karte stehen kann! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese zweistellige Zahl!

Aufgabe 250736:



Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Der im Innern von $ABCD$ gelegene Viertelkreisbogen um B mit dem Radius $\overline{AB}$ sei k_1, der im Innern von $ABCD$ gelegene Halbkreis mit AB als Durchmesser sei k_2. Ein von B ausgehender Strahl schneide k_2 in einem Punkt E und k_1 in einem Punkt F.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{\sphericalangle DAF} = \overline{\sphericalangle EAF}$ folgt!

25. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 250731:

Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt:

Eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, ist genau dann Teiler von 2^n, wenn ihre Primfaktorzerlegung keine anderen Primfaktoren als die Primzahl 2 aufweist, und zwar nicht mehr als n solche Faktoren. Das trifft genau auf die n natürlichen Zahlen

$$2^1,\ 2^2,\ \dots,\ 2^{n-1},\ 2^n \qquad (1)$$

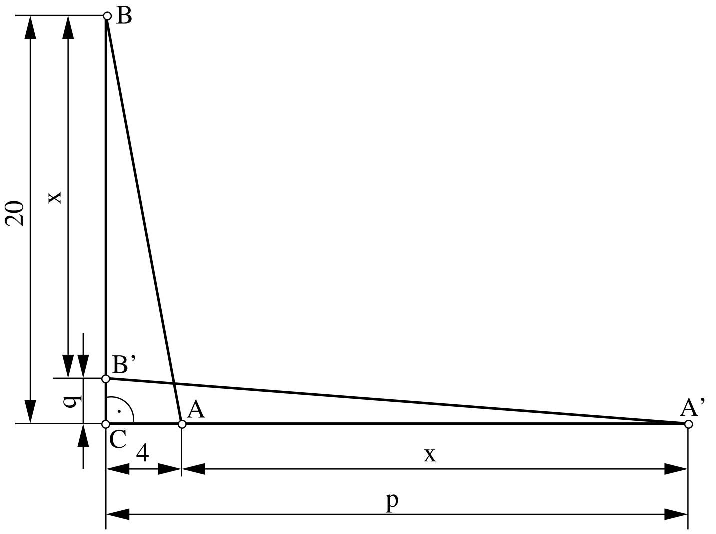
zu. Ferner gilt:

$$1 \text{ ist Teiler der Zahl } 2^n. \qquad (2)$$

Die gesuchte Anzahl der in (1) und (2) aufgezählten sämtlichen natürlichen Zahlen, die Teiler von 2^n sind, ist folglich $n + 1$.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 250732:



Im Dreieck ABC ist wegen $CA \perp CB$ die eine dieser beiden Seiten gleichzeitig die zur anderen zugehörige Höhe. Also hat das Dreieck ABC den Flächeninhalt

$$J = \frac{1}{2} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 \text{ cm}^2 = 40 \text{ cm}^2. \qquad (3)$$

Ist $A'B'C$ ein Dreieck wie in (1), (2) beschrieben, so ist es ebenfalls bei C rechtwinklig und hat daher den Flächeninhalt

$$J' = \frac{1}{2} \cdot \overline{CA'} \cdot \overline{CB'}; \qquad (4)$$

weiterhin gilt für $\overline{CA'} = p$ cm und $\overline{CB'} = q$ cm, daß p und q natürliche Zahlen mit

$$p = 4 + x,\ q = 20 - x \qquad (5)$$

sind. Dabei ist aus (3), (4) ersichtlich, daß die Bedingungen (1) und (2) genau dann erfüllt werden, wenn außer (5) auch

$$J' = \frac{55}{100} \cdot J, \quad \text{d.h.}$$
$$\frac{1}{2} \cdot p \cdot q = \frac{55}{100} \cdot 40$$

oder, gleichwertig hiermit,

$$p \cdot q = 44 \qquad (6)$$

gilt.

Die einzigen Zerlegungen von 44 in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen sind aber $44 = 1 \cdot 44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11$. Aus (5) folgt nun $p+q = 24$ und $p > 4$, so daß für (5) nur die Möglichkeit $p = 22$, $q = 2$ und damit, nochmals nach (5), $x = 18$ verbleibt.

Da hiermit in der Tat (5) und (6) gelten, ist bewiesen:

Es gibt genau eine natürliche Zahl x, die (1) und (2) erfüllt, nämlich $x = 18$.

Hinweis: Aus (5) und (6) läßt sich x auch auf andere Weise ermitteln; diese Gleichungen führen (sogar ohne Verwendung der Ganzzahligkeit) eindeutig auf die Werte $x = 18$ und $x = -2$, von denen der zweite, da er negativ ist, ausscheidet.

Die Abbildung wird nicht vom Schüler verlangt.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 250733:

a) Für jedes Viereck $ABCD$, das (zusammen mit einem Punkt E) die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, gilt:

Nach (1), also $BC \parallel AD$, ist $\overline{\sphericalangle BAD} + \overline{\sphericalangle ABC} = 180°$. Nach (2) ergibt sich durch Halbieren $\overline{\sphericalangle BAE} + \overline{\sphericalangle ABE} = 90°$; hieraus folgt nach dem Innenwinkelsatz, daß $\sphericalangle AEB$ ein rechter Winkel ist.

Nach (3) liegen A und B so auf seinen Schenkeln, daß $\overline{EA} = 6{,}0$ cm und $\overline{EB} = 4{,}0$ cm gilt. Nach (1) ist die Gerade p durch C und D eine Parallele zu AB; nach (2) geht sie durch E. Auf dieser Geraden p liegt D; ferner liegt D nach (2) auf dem Schenkel AD des Winkels $\sphericalangle BAD$, der doppelt so groß ist wie $\sphericalangle BAE$.

Auch C liegt auf der Geraden p; ferner liegt C nach (1) auch auf der Parallelen q durch B zu AD.

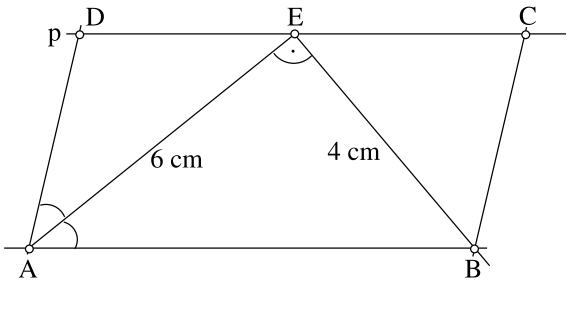
Damit ist bewiesen, daß jedes Viereck $ABCD$, das (1), (2), (3) erfüllt, nach der folgenden Beschreibung konstruiert werden kann:

b) (I) Man konstruiert einen rechten Winkel mit dem Scheitel E.

(II) Von E aus trägt man auf einem Schenkel dieses Winkels die Strecke EA der Länge $6{,}0$ cm und auf dem anderen Schenkel die Strecke EB der Länge $4{,}0$ cm ab.

(III) Man konstruiert die Parallele p durch E zu AB.

(IV) In A trägt man an AE nach derjenigen Seite, auf der B nicht liegt, den Winkel der Größe $\overline{\sphericalangle BAE}$ ab und bezeichnet den Schnittpunkt von seinem freien Schenkel und von p mit D.



(V) Man konstruiert die Parallele q durch B zu AD und bezeichnet den Schnittpunkt von p und von q mit C.

c) Für jedes Viereck $ABCD$, das nach dieser Beschreibung konstruiert wird, gilt:

Nach (III) und (V) ist $DC \parallel AB$ und $BC \parallel AD$, also (1) erfüllt. Nach (V) und (IV) ist p die Gerade durch C und D, auf ihr liegt E; durch E geht nach (IV) die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAD$. Nach (I) und dem Innenwinkelsatz ist ferner $\overline{\sphericalangle BAE} + \overline{\sphericalangle ABE} = 90°$;

nach (IV) folgt hieraus durch Verdoppeln $\overline{\sphericalangle BAD} + 2 \cdot \overline{\sphericalangle ABE} = 180°$. Andererseits folgt aus $BC \parallel AD$: $\overline{\sphericalangle BAD} + \overline{\sphericalangle ABC} = 180°$.

Also ist $2 \cdot \overline{\sphericalangle ABE} = \overline{\sphericalangle ABC}$; somit geht auch die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$ durch E, folglich ist (2) erfüllt. Nach (II) ist auch (3) erfüllt.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 250734:

Die Geschwindigkeit des Sportflugzeugs sei $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$, die des Jagdflugzeugs ist dann $3x \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Da das Sportflugzeug in einer Stunde x km flog, flog das Jagdflugzeug in einer halben Stunde $(x + 200)$ km und daher in einer Stunde $2 \cdot (x + 200)$ km. Also gilt

$$\begin{aligned} 3x &= 2 \cdot (x + 200), \\ 3x &= 2x + 400, \\ x &= 400. \end{aligned}$$

Das Sportflugzeug hatte somit die Geschwindigkeit $400 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, das Jagdflugzeug hatte die Geschwindigkeit $1200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Hinweis zur Korrektur: Eine Probe ist zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da die Existenz von zwei Geschwindigkeiten, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, aus dem Aufgabentext hervorgeht.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 250735:

Bezeichnet man die gesuchte zweistellige Zahl zunächst mit einem Kästchen $\square$, so gibt es genau die folgenden Möglichkeiten für die Reihenfolge der drei Karten:

$$\begin{array}{ccc} 15 & 23 & \square \\ 15 & \square & 23 \\ 23 & 15 & \square \\ 23 & \square & 15 \\ \square & 15 & 23 \\ \square & 23 & 15 \end{array}$$

Ohne Berücksichtigung aller Ziffern, die in den Kästchen stehen, ergibt sich durch Addition

$$76\ 76\ 76.$$

Nach Rainers Angabe ergibt sich *mit* Berücksichtigung der Ziffern in den Kästchen als Summe die Zahl

$$137\ 37\ 36.$$

Daher sind Rainers Aussagen genau dann erfüllt, wenn eine Addition der folgenden Art

$$\left.\begin{array}{cccc} & \square & \square & \square \\ + & \square & \square & \square \end{array}\right\} \qquad (*)$$

auf ein Ergebnis führt, das seinerseits zu 767 676 addiert die Summe 1 373 736 ergibt. Wegen $1\,373\,736 - 767\,676 = 606\,060$ gilt dies genau dann, wenn (*) das Ergebnis 606 060 hat. Das trifft zu, wenn die Addition

$$\begin{array}{r} \square \\ + \ \square \end{array}$$

auf die Summe 60 führt, also genau dann, wenn auf der dritten Karte die Zahl 30 steht.

2. Lösungsweg:

Sind a und b (in dieser Reihenfolge) die gesuchten zwei Ziffern, so addiert Rainer die Zahlen

$$\begin{array}{rcr} 152\,300 & + & 10a+b, \\ 150\,023 & + & 100\cdot(10a+b), \\ 231\,500 & + & 10a+b, \\ 230\,015 & + & 100\cdot(10a+b), \\ 1\,523 & + & 10\,000\cdot(10a+b), \\ 2\,315 & + & 10\,000\cdot(10a+b), \end{array}$$

Ihre Summe ist $767\,676+20\,202\cdot(10a+b)$. Daher sind Rainers Aussagen genau dann erfüllt, wenn $767\,676+20\,202\cdot(10a+b)=137\,3736$ gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$\begin{aligned} 20202\cdot(10a+b) &= 606060, \\ (10a+b) &= 30. \end{aligned}$$

Also treffen Rainers Aussagen genau dann zu, wenn auf der dritten Karte die Zahl 30 steht.

Hinweis zur Korrektur: Wird die Lösungsermittlung nicht als Äquivalenz ausgeführt, sondern nur als Schluss aus den Bedingungen auf das Ergebnis 30, so ist auch der umgekehrte Schluß (die Probe) erforderlich.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 250736:

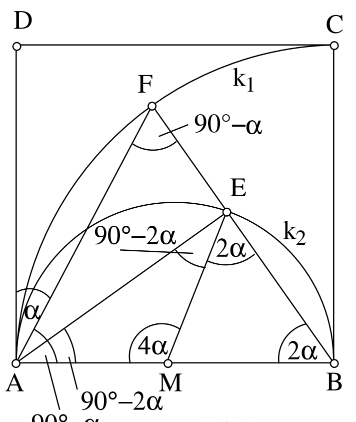


Abbildung a

Es sei M der Mittelpunkt von AB, ferner sei $\overline{\sphericalangle DAF}=\alpha$ (Abbildung a). Da $ABCD$ ein Quadrat ist, gilt $\overline{\sphericalangle BAD}=90°$, also

$$\overline{\sphericalangle BAF}=90°-\alpha. \qquad (1)$$

Da A und F auf k_1 liegen, gilt $\overline{AB}=\overline{FB}$. Nach dem Basiswinkelsatz folgt somit

$$\overline{\sphericalangle AFB}=\overline{\sphericalangle BAF}=90°-\alpha. \qquad (2)$$

Aus (1), (2) und dem Innenwinkelsatz (angewendet auf das Dreieck ABF) folgt

$$\overline{\sphericalangle FBA}=2\alpha. \qquad (3)$$

Da B und E auf k_2 liegen, gilt $\overline{BM}=\overline{EM}$ und somit nach dem Basiswinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle MEB}=\overline{\sphericalangle EBM}=\overline{\sphericalangle FBA}=2\alpha. \qquad (4)$$

Aus (3), (4) und dem Außenwinkelsatz (angewendet auf das Dreieck BEM) folgt

$$\overline{\sphericalangle EMA}=4\alpha. \qquad (5)$$

Da A und E auf k_2 liegen, gilt $\overline{AM}=\overline{EM}$ und somit $\overline{\sphericalangle MAE}=\overline{\sphericalangle AEM}$.

Aus (5) und dem Innenwinkelsatz (angewendet auf das Dreieck AME) folgt daher

$$\overline{\sphericalangle MAE}=\overline{\sphericalangle AEM}=\tfrac{1}{2}(180°-\overline{\sphericalangle EMA})=90°-2\alpha. \qquad (6)$$

Somit ergibt sich aus (1) und (6)

$$\overline{\sphericalangle EAF} = \overline{\sphericalangle BAF} - \overline{\sphericalangle MAE} = 90° - \alpha - (90° - 2\alpha) = \alpha. \ \square$$

2. Lösungsweg:

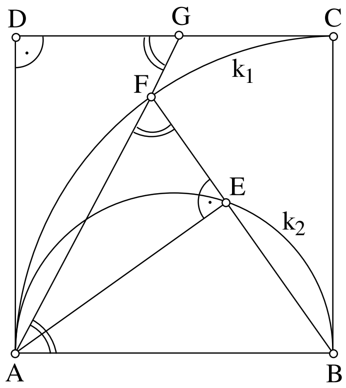


Abbildung b

Die Verlängerung von AF schneide CD in G (Abbildung b). Dann folgt (Wechselwinkel):

$$\overline{\sphericalangle AGD} = \overline{\sphericalangle BAG} = \overline{\sphericalangle BAF} = \overline{\sphericalangle BFA} \qquad (7)$$

(Basiswinkel im Dreieck ABF mit $\overline{BA} = \overline{BF}$.) Ferner folgt

$$\overline{\sphericalangle GDA} = 90° = \overline{\sphericalangle AEB} \text{ (Thalesatz)}$$
$$= \overline{\sphericalangle AEF} \text{ (Nebenwinkel)} \qquad (8)$$

Aus (7) und (8) folgt nach dem Innenwinkelsatz, angewendet auf die Dreiecke AGD und AFE,

$$\overline{\sphericalangle EAF} = \overline{\sphericalangle DAG} = \overline{\sphericalangle DAF}. \ \square$$

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission