24. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1984/1985

Aufgaben und Lösungen

24. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240721:

Drei Ehepaare sitzen zum Rommméspiel im Kreis um einen Tisch. Die Vornamen der Männer sind Anton, Bernd und Christian, die Vornamen der Frauen sind Ulrike, Vera und Waltraud. Ferner ist bekannt:

(1) Keiner der sechs Teilnehmer sitzt seinem Ehepartner gegenüber.

(2) Vera sitzt zwischen zwei Männern.

(3) Anton sitzt neben seiner Frau.

(4) Rechts von Ulrikes Mann sitzt Waltraud, links von ihm sitzt Christian.

Beweise, daß man aus diesen Angaben sowohl von jedem Teilnehmer den Ehepartner als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

Aufgabe 240722:

Ein Garten von rechteckiger Gestalt ist genau 13 m länger als breit. Um ihn vollständig zu umzäunen, benötigt man genau 92 m Zaun.

a) Berechne den Flächeninhalt des Gartens!

b) Der Garten soll vollständig in Beete und Wege aufgeteilt werden, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind:

Jedes Beet hat die Gestalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 m und 1 m. Zwischen je zwei benachbarten Beeten und zwischen dem Zaun und den Beeten ist überall ein 25 cm breiter Weg angelegt.

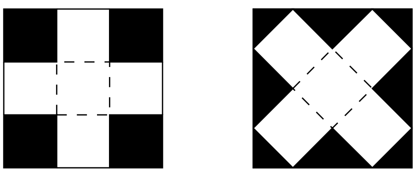
Untersuche, ob es eine Aufteilung des Gartens gibt, bei der diese Bedingungen erfüllt sind! Wenn das der Fall ist, so ermittle für eine solche Aufteilung die Anzahl der Beete!

Aufgabe 240723:

Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, daß der Schnittpunkt E der beiden Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle CBA$ auf der Seite CD liegt.

Beweise, daß unter dieser Voraussetzung E stets der Mittelpunkt der Seite CD ist!

Aufgabe 240724:



Aus einem quadratischen Stück Blech der Seitenlänge a soll ein oben offener würfelförmiger Kasten hergestellt werden. Für das Netz zum Herstellen eines solchen Kastens werden die beiden Varianten in dem Bild zur Diskussion gestellt. Beide Netze sind so angeordnet, daß die Diagonalen des gegebenen Quadrates jeweils Symmetrieachsen des Netzes sind.

Ermittle in Abhängigkeit von a die Größe des Abfalls (im Bild schwarz) bei beiden Varianten! Wenn bei einer Variante ein kleinerer Abfall entsteht, so gib diese Variante an!

24. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 240721:

Nach (4) ist Ulrikes Mann nicht Christian. Aus (4) folgt auch, daß Ulrikes Mann nicht neben seiner Frau sitzt; er ist wegen (3) also auch nicht Anton. Daher gilt:

Ulrikes Mann ist Bernd, (*)

und man erhält Abbildung a.

Hiernach kann Ulrike wegen (1) nur entweder links von Christian oder rechts von Waltraud sitzen. Säße sie links von Christian (Abbildung b), so blieben für Vera nur solche Plätze übrig, die jeweils einer Frau benachbart wären, im Widerspruch zu (2). Also sitzt Ulrike rechts von Waltraud (Abbildung c).

Nach (2) müssen dann die Plätze von Anton und Vera so angeordnet sein, wie in Abbildung d angegeben.

Wegen (*) ist Antons Frau nicht Ulrike; daher folgt aus Abbildung d und (3):

Antons Frau ist Vera, (**)

und es verbleibt als drittes Ehepaar:

Christians Frau ist Waltraud. (***)

Damit ist bewiesen, daß man die Ehepartner und die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Abbildung d angegeben.

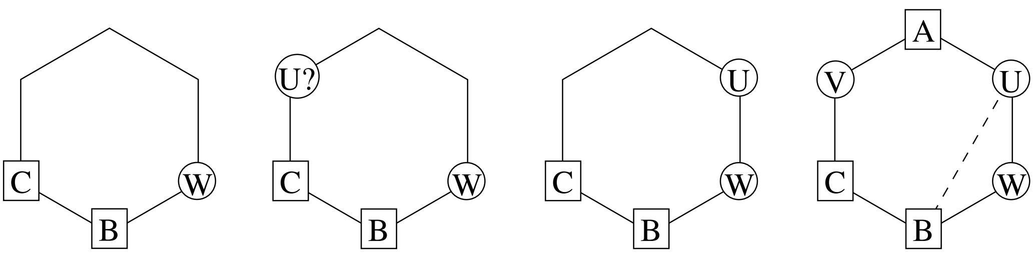


Abbildung a Abbildung b Abbildung c Abbildung d

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 240722:

a) Sind a und b die in Metern angegebene Länge bzw. Breite des Gartens, so gilt

$$a = 13 + b \qquad (1)$$

sowie, weil der halbe Umfang $92\,\mathrm{m} : 2 = 46\,\mathrm{m}$ beträgt,

$$a + b = 46. \qquad (2)$$

Setzt man a aus (1) in (2) ein, so folgt $13 + 2b = 46$, $2b = 33$, $b = 16,5$ und damit aus (1) $a = 29,5$.

Der Flächeninhalt des Gartens beträgt folglich $16,5\,\mathrm{m} \cdot 29,5\,\mathrm{m} = 486,75\,\mathrm{m}^2$.

b) Legt man zunächst längs zweier benachbarter Seiten des Gartens einen Weg von 25 cm Breite an (in Abbildung a schraffiert), so verbleibt ein Rechteck von 29,25 m Länge und 16,25 m Breite. Wenn man dieses Rechteck in Teilrechtecke mit den Seitenlängen 3,25 m und 1,25 m aufteilen kann (Abbildung b), so erhält man eine Anordnung von Beeten, die den geforderten Bedingungen genügt.

Eine Möglichkeit hierzu zeigt Abbildung a, wie sich wegen $29,25 : 3,25 = 9$ und $16,25 : 1,25 > 13$ bestätigen läßt. Bei dieser Aufteilung ist die Anzahl der Beete $9 \cdot 13 = 117$.

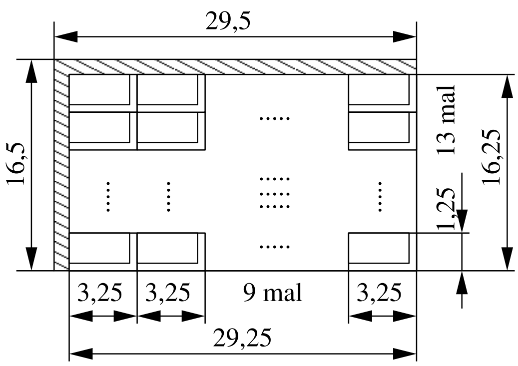


Abbildung a (nicht maßstabsgetreu)

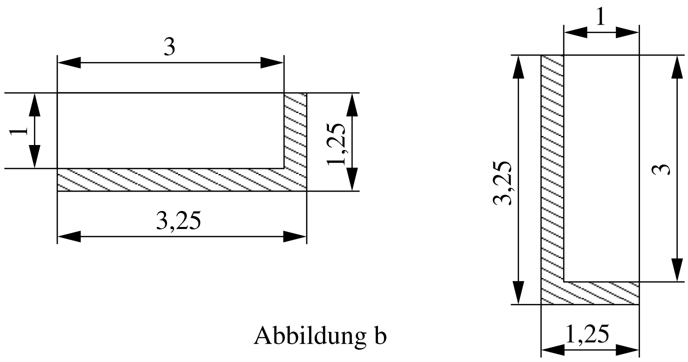


Abbildung b

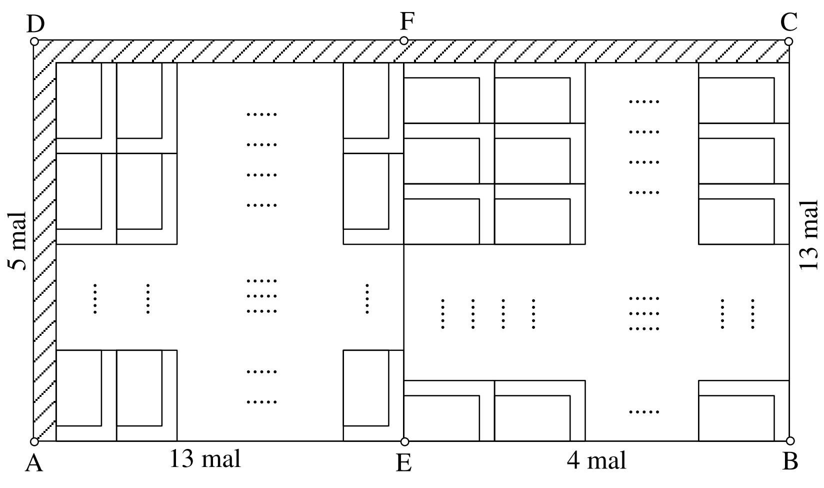


Abbildung c (nicht maßstabsgerecht)

Andere Lösungsmöglichkeiten:

Zu a): Die Ermittlung von a und b kann auch in mehr anschaulicher Weise formuliert werden: Schneidet man von dem Garten $ABCD$ ein Quadrat $AEFD$ ab, dessen Seitenlänge gleich der Breite b des Gartens ist, so verbleibt ein Rechteck $EBCF$ von gleicher Breite b, dessen Lange 13 m beträgt (Abbildung c). Die 92 m Zaun teilen sich damit auf in zwei Strecken EB, FC der Länge 13 m und vier Strecken AE, DF, AD, BC der Länge b. Wegen $92 - 2 \cdot 13 = 66$ und $66 : 4 = 16,5$ folgt damit $b = 16,5\,\text{m}$, also $a = \overline{AE} + \overline{EB} = b + 13\,\text{m} = 29,5\,\text{m}$.

Zu b): Eine andere mögliche Anordnung von Beeten zeigt Abbildung c. Weitere Anordnungen entstehen durch häufigeren Wechsel zwischen 1, 25 m breiten und 3, 25 m breiten "Streifen" parallel zur 16, 5 m langen Gartenseite. Bei allen Anordnungen ergibt sich dieselbe Anzahl 117 der Beete. (Diese Angaben werden nicht vom Schüler verlangt.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 240723:

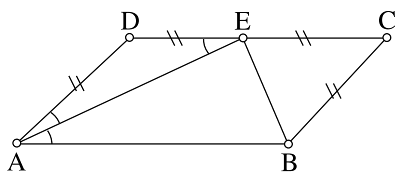
Da im Parallelogramm $ABCD$ die gegenüberliegenden Seiten AB und CD zueinander parallel sind und da E auf CD liegt, gilt nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen $\overline{\sphericalangle BAE} = \overline{\sphericalangle DEA}$.

Da AE nach Voraussetzung den Winkel $\sphericalangle BAD$ halbiert, gilt $\overline{\sphericalangle BAE} = \overline{\sphericalangle EAD}$.

Daher folgt $\overline{\sphericalangle DEA} = \overline{\sphericalangle EAD}$.

Nach der Umkehrung des Satzes über die Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken folgt hieraus $\overline{AD} = \overline{ED}$.

Analog erhält man $\overline{BC} = \overline{EC}$.



Da nach Voraussetzung AD und BC gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms sind, gilt $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Also ist $\overline{ED} = \overline{EC}$.

Da E nach Voraussetzung auch auf der Seite CD liegt, ist damit E als Mittelpunkt von CD nachgewiesen. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 240724:

Variante 1:

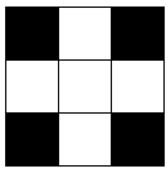


Abbildung a

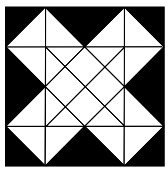


Abbildung b

Die Quadratfläche kann in genau 9 kongruente Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ aufgeteilt werden (Abbildung a); davon sind 4 Quadrate Abfall, die restlichen 5 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens. Folglich beträgt hier der Abfall $\frac{4}{9}a^2$.

Variante 2:

Die Quadratfläche kann in genau 32 kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit der Schenkellänge $\frac{a}{4}$ aufgeteilt werden (z.B. wie in Abbildung b); davon sind 12 Dreiecke Abfall, die restlichen 20 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens.

Wegen $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ beträgt demnach hier der Abfall $\frac{3}{8}a^2$.

Vergleich: Wegen $4 \cdot 8 > 3 \cdot 9$ gilt $\frac{4}{9} > \frac{3}{8}$. Folglich ist der Abfall bei Variante 2 kleiner als bei Variante 1. (Oder: Das Netz beträgt $\frac{5}{9}a^2$ bei Variante 1, $\frac{5}{8}a^2$ bei Variante 2, ist also wegen $\frac{5}{8} > \frac{5}{9}$ bei Variante 2 größer. Daher führt Variante 2 zu kleinerem Abfall als Variante 1.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission