24. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1984/1985

Aufgaben und Lösungen

24. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240711:

Über die Jungen einer Schulklasse ist folgendes bekannt:

Jeder Junge dieser Klasse gehört mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften "Foto", "Junge Mathematiker", "Turnen" an. Ferner gelten folgende Aussagen:

(1) Genau sechs Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Foto".

(2) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Junge Mathematiker".

(3) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Turnen".

Weiterhin gelten über die Jungen dieser Klasse auch die folgenden Aussagen:

(4) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG "Foto" als auch zur AG "Junge Mathematiker".

(5) Genau ein Junge gehört sowohl zur AG "Foto" als auch zur AG "Turnen".

(6) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG "Junge Mathematiker" als auch zur AG "Turnen".

Schließlich gilt auch die Aussage

(7) Genau einer der Jungen dieser Klasse nimmt an allen drei Arbeitsgemeinschaften teil.

(Dagegen ist zu beachten, daß in (1) bis (6) nichts darüber ausgesagt wird, ob die betreffenden Jungen außer den jeweils genannten Arbeitsgemeinschaften noch weiteren Arbeitsgemeinschaften angehören.)

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahl aller Jungen dieser Klasse eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl an!

Aufgabe 240712:

Peter und Klaus würfeln mit drei Würfeln. Sie notieren nach jedem Wurf die drei erhaltenen Augenzahlen a, b, c in der Darstellung (a, b, c), wobei sie diese drei Zahlen so angeordnet haben, daß $a \geq b \geq c$ gilt. Sie bezeichnen zwei Würfe genau dann als voneinander "verschieden", wenn bei dieser Schreibweise mindestens ein Unterschied zwischen den beiden Darstellungen auftritt.

(1) Welches ist die kleinste Summe und welches ist die größte Summe der drei Augenzahlen, die bei einem Wurf auftreten kann?

(2) Beim Spiel fragt Peter: "Wieviel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt?" Beantworte diese Frage!

(3) Klaus überlegt: "Wieviel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist?" Ermittle auch diese Anzahl!

(4) Nach genau 50 Würfen beenden die beiden Schüler ihr Würfelspiel. Sie fragen sich, ob dabei alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein können. Beantworte diese Frage und beweise deine Antwort!

Aufgabe 240713:

In einem Ferienlager wird ein Tischtennisturnier geplant, das folgendermaßen ablaufen soll:

Die 36 Teilnehmer tragen zunächst Vorrundenspiele in sechs Gruppen zu je sechs Spielern aus, und zwar spielt von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden genau einmal. Die jeweils beiden Erstplazierten einer jeden Gruppe gelangen in die Zwischenrunde. Diese 12 Teilnehmer der Zwischenrunde werden neu in zwei Gruppen zu ja sechs Spielern eingeteilt, und dann spielt in der Zwischenrunde wieder von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden. Die jeweils beiden Erstplazierten jeder dieser zwei Gruppen gelangen in die Endrunde. Diese vier Teilnehmer der Endrunde ermitteln durch Spiele jeder gegen jeden die Medaillengewinner.

Das Turnier soll um 8.30 Uhr beginnen. Zwischen Vor- und Zwischenrunde soll ein Pause von einer Stunde eingeplant werden; nach Abschluß der Zwischenrunde wird nochmals eine Pause von 15 Minuten eingeplant, und zwischen dem Abschluß der Endrunde und der Siegerehrung ist wiederum eine Pause von 15 Minuten vorgesehen.

Wann kann man unter diesen Bedingungen die Siegerehrung frühestens ansetzen, wenn für jedes Spiel (einschließlich der notwendigen Spielerwechsel) 15 Minuten geplant werden und wenn genau sechs Tischtennisplatten zur Verfügung stehen?

Zeige durch eine Aufstellung der Spiele, die jeweils gleichzeitig stattfinden sollen, daß der von dir angegebene Zeitpunkt der Siegerehrung eingehalten werden kann.

Aufgabe 240714:

(a) Über die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks wird vorausgesetzt:

  (1) Diese Maßzahlen sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

  (2) Der Umfang des Dreiecks ist um 25 cm länger als die kürzeste Dreiecksseite. Ermittle aus diesen Voraussetzungen die drei Seitenlängen!

(b) Löse die Aufgabe, wenn die Voraussetzung (2) durch die folgende Voraussetzung (2') ersetzt wird!

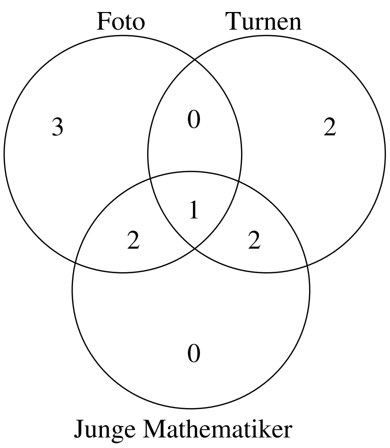
  (2') Es sei n eine vorgegebene natürliche Zahl. Der Umfang des Dreiecks ist um n Zentimeter länger als die kürzeste Dreiecksseite. Die gesuchten drei Seitenlängen sind mit Hilfe von n ausgedrückt anzugeben.

(c) Untersuche, welche natürlichen Zahlen n in (2') vorzugeben sind, damit in (b) eine lösbare Aufgabe entsteht!

24. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 240711:



Außer dem einen Jungen, der nach (7) alle drei Arbeitsgemeinschaften besucht, gibt es nach (4), (5) bzw. (6) (und wegen $3-1=2$, $1-1=0$ bzw. $3-1=2$)

> genau 2 Jungen, die genau zu den AG "Foto" und "Junge Mathematiker" gehören,
> keinen Jungen, der genau zu den AG "Foto" und "Turnen" gehört,
> genau 2 Jungen, die genau zu den AG "Junge Mathematiker" und "Turnen" gehören.

Hiernach und nach (1), (2) bzw. (3) (sowie wegen $6-2-0-1=3$, $5-2-2-1=0$ bzw. $5-0-2-1=2$) gibt es

> genau 3 Jungen, die genau zur AG "Foto" gehören,
> keinen Jungen, der genau zur AG "Junge Mathematiker" gehört,
> genau 2 Jungen, die genau zur AG "Turnen" gehören.

Mit dieser Aufzählung sind alle Möglichkeiten erfaßt, mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften anzugehören, und zwar jede solche Möglichkeit genau einmal. Daher ist $1+2+0+2+3+0+2=10$ die gesuchte Anzahl aller Jungen dieser Klasse.

Hinweise zur Korrektur: Die Lösungsschritte können auch mit Hilfe von Gleichungen für Variable (etwa F, M, T, FM, FT, MT, FMT als Anzahlen derjenigen Jungen, die genau in den AG mit den jeweils vorkommenden Anfangsbuchstaben sind, wobei z.B. (1) als $F+FM+FT+FMT=6$ erscheint) oder auch unter Verwendung eines Mengendiagramms wie in der Abbildung formuliert sein. Erforderlich ist es bei jeder derartigen Darstellungsvariante des obigen Lösungsweges, daß die (vollständige und disjunkte) Zerlegung in die Mengen mit den Anzahlen F, M,..., FMT sowie die rechnerischen Teilschritte zur Ermittlung dieser Anzahlen ersichtlich sind.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 240712:

(1) Die kleinste Summe der Augenzahlen wird mit dem Wurf $(1,1,1)$ erreicht und beträgt somit 3, die größte Summe tritt beim Wurf $(6,6,6)$ auf und beträgt somit 18.

(2) Es gibt genau die folgenden sechs verschiedenen Würfe, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt:

$$(6,5,1),\ (5,5,2),\ (4,4,4),\ (6,4,2),\ (5,4,3),\ (6,3,3,).$$

(3) Es gibt genau die folgenden verschiedenen Würfe, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist:

$(6,6,6)$, $(6,6,5)$, $(6,5,5)$, $(6,6,4)$, $(6,5,4)$, $(6,4,4)$, $(6,6,3)$, $(6,5,3)$, $(6,4,3)$, $(6,3,3)$, $(6,6,2)$, $(6,5,2)$, $(6,4,2)$, $(6,3,2)$, $(6,2,2)$, $(6,6,1)$, $(6,5,1)$, $(6,4,1)$, $(6,3,1)$, $(6,2,1)$, $(6,1,1)$.

Ihre Anzahl beträgt $6+5+4+3+2+1=21$.

(4) In entsprechender Weise gibt es genau die folgenden $5+4+3+2+1=15$ verschiedenen Würfe mit 5 als höchster Augenzahl $(5,5,5)$, $(5,5,4)$, $(5,4,4)$, ..., $(5,5,1)$, $(5,4,1)$, ... , $(5,1,1)$; analog genau $4+3+2+1=10$ verschiedene Würfe mit 4 als höchster Augenzahl und $3+2+1=6$ verschiedene Würfe mit 3 als höchster Augenzahl.

Wegen $21+15+10+6>50$ sind dies bereits mehr als 50 verschiedene Würfe. Also können in 50 Würfen nicht alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein.

Hinweis zur Korrektur: Aus der Lösungsgestaltung soll hervorgehen, daß die jeweiligen Fallaufzählungen jeden zu erfassenden Fall genau einmal enthalten. Als ausreichend, aber auch im Sinne einer Minimalforderung als notwendig ist hierzu z.B. eine systematische Aufzählung, etwa in der Art des obigen Lösungsweges, zu werten.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 240713:

Vorrunde: In jeder der sechs Gruppen sind $\frac{6\cdot5}{2}$ Spiele, d.s. 15 Spiele, auszutragen. Da sechs Platten vorhanden sind, steht für jede Gruppe stets eine Platte zur Verfügung, an der sie ihre 15 Spiele austragen kann (und da hierbei auch alle sechs Platten ständig belegt sind, ist eine weitere Verkürzung der Spielzeit durch gleichzeitiges Austragen von noch mehr Spielen nicht möglich). Also braucht man für die Vorrunde 15 Viertelstunden, an die sich eine Pause von 4 Viertelstunden anschließt.

Zwischenrunde: Wieder sind in jeder der beiden Gruppen 15 Spiele auszutragen. Da man jeder Gruppe drei Platten zur Verfügung stellen kann, sind wegen $15:3=5$ mindestens 5 Viertelstunden hierfür erforderlich. Sie sind auch ausreichend; denn man kann es so einrichten, daß stets drei der 15 Spiele gleichzeitig ausgetragen werden, z.B. für sechs Spieler A, B, C, D, E, F durch folgende Verteilung:

erste Viertelstunde: (A,B), (C,D), (E,F),
zweite Viertelstunde: (A,C), (B,E), $(D.F)$,
dritte Viertelstunde: (A,D), (B,F), $(C.E)$,
vierte Viertelstunde: (A,E), (B,D), (C,F),
fünfte Viertelstunde: (A,F), (B,C), (D,E).

(Wieder ist eine weitere Verkürzung nicht möglich, da alle Platten ständig belegt sind.) Nach der somit ermittelten Spielzeit von 5 Viertelstunden schließt sich eine Pause von 1 Viertelstunde an.

Endrunde: Diesmal sind $\frac{4\cdot3}{2}$ Spiele, d.s. sechs Spiele, auszutragen. Es können gleichzeitig stets nur zwei Spiele ausgetragen werden, da insgesamt nur vier Spieler in der Endrunde sind. Also sind wegen $6:2=3$ mindestens 3 Viertelstunden erforderlich. Sie sind auch ausreichend; denn man kann es so einrichten, daß stets zwei Spiele gleichzeitig stattfinden, z.B. für vier Spieler A, B, C, D durch folgende Verteilung:

erste Viertelstunde: (A,B), (C,D),
zweite Viertelstunde: (A,C), (B,D),
dritte Viertelstunde: (A,D), (B,C).

Zu den so ermittelten 3 Viertelstunden Spielzeit kommt noch eine Viertelstunde Pause hinzu. Damit sind insgesamt $15+4+5+1+3+1=29$ Viertelstunden bis zur Siegerehrung vorzusehen; diese ist hiernach um 15.45 Uhr anzusetzen.

Hinweis zur Korrektur: Zu einer vollständigen Lösung ist es erforderlich, sowohl die Rechenschritte zur Ermittlung der notwendigen Zeit als auch den Existenznachweis einer Spieleinteilung im Rahmen dieser Zeit anzuführen. Eine mehr verbale oder stärker formel- bzw. tabellenmäßige Ausführung ist dabei zulässig.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 240714:

(a) Da der Umfang die Summe der Längen der kürzesten Dreiecksseite und der beiden anderen Seiten ist, beträgt nach (2) die Summe der Längen der beiden anderen Seiten 25 cm. Also ist 25 nach (1) die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. Das ist nur möglich, wenn es sich um die Zahlen 12 und 13 handelt. Hiernach (und nochmals wegen (1)) lauten die gesuchten Seitenlängen 11 cm, 12 cm, 13 cm.

(b) Wie in (a) folgt, daß n die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist. Bezeichnet m die Zahl in der Mitte zwischen diesen beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so lauten sie $m-\frac{1}{2}$ und $m+\frac{1}{2}$; ihre Summe ist also $2m$. Da sie n beträgt, muß $m=\frac{n}{2}$ sein. Die beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind somit $\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$ und $\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$, die Maßzahlen der drei gesuchten Seltenlängen können folglich nur $\frac{n}{2}-\frac{3}{2}$, $\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$, $\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$ lauten.

(c) Die Aufgabe (b) ist hiernach genau dann lösbar, wenn die zuletzt gefundenen Zahlen natürliche Zahlen größer als 0 sind, die auch die in der Dreiecksungleichung geforderte Bedingung erfüllen, daß die größte der drei Maßzahlen kleiner als die Summe der beiden anderen Maßzahlen ist.

  (I) Natürliche Zahlen sind die drei Zahlen genau dann, wenn die (vorzugebende natürliche) Zahl n ungerade ist und $n \geq 3$ gilt.

  (II) Größer als 0 sind sie genau dann, wenn $n > 3$ ist.

  (III) Für $n = 5$ lauten die drei Maßzahlen 1, 2, 3; sie erfüllen also nicht die Dreiecksungleichung.

  Für $n = 7$ lauten sie 2, 3, 4 und erfüllen somit die Dreiecksungleichung. Vergrößert man n noch weiter, so vergrößern sich die drei Maßzahlen stets um einen einheitlichen Betrag. Also vergrößert sich die Summe der beiden kürzesten Längen um den doppelten Betrag wie die längste; somit bleibt die Dreiecksungleichung erst recht gültig.

Mit (I), (II), (III) ist bewiesen: In (b) entsteht genau dann eine lösbare Aufgabe, wenn die natürliche Zahl n als ungerade Zahl $n \geq 7$ vorgegeben wird.

Hinweise zur Korrektur:

1. Man kann auch erst Aufgabe (b) lösen und dann die Lösung von (a) durch Einsetzen von $n = 25$ erhalten.
2. Man kann auch stärkeren Gebrauch von (mit geeigneten Variablen geschriebenen) Gleichungen und Ungleichungen machen. Beispielsweise kann man die Maßzahl der Länge der kürzesten Seite mit x bezeichnen, die Gleichung $x + x + 1 + x + 2 = x + n$ durch $x = \frac{n-3}{2}$ und die Ungleichungen $\frac{n-3}{2} > 0$, $\frac{n+1}{2} < \frac{n-3}{2} + \frac{n-1}{2}$ durch $n > 5$ lösen. Der obige Lösungsweg zeigt, wie sich diese (zu Beginn von Klasse 7 noch nicht systematisch behandelten) Umformungsschritte durch weitgehend anschaulichere Argumente ersetzen lassen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission