23. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Saison 1983/1984

Aufgaben und Lösungen

23. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230511:

Bernd, Peter und Fred nahmen mit Erfolg an der Schulolympiade teil. Jeder von ihnen bekam genau eine der folgenden drei Auszeichnungen: 1. Preis, 2. Preis oder Diplom. Ferner ist bekannt:

(1) Der Schüler mit den 2. Preis ist älter als Bernd.

(2) Fred erhielt nicht den 1. Preis.

(3) Bernd gehört keiner mathematischen Arbeitsgemeinschaft an.

(4) Der Schüler, der den 1. Preis errang, ist in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft.

Wer von ihnen erhielt den 1. Preis, wer von ihnen erhielt den 2. Preis, und wer von ihnen erhielt das Diplom? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 230512:

Die Maßzahlen der (in Zentimeter gemessenen) Seitenlängen einen Dreiecks sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang diesen Dreiecks beträgt 42 cm.

Wie lang sind seine drei Seiten?

Aufgabe 230513:

Für die Buchstaben a, b, c, d, e, f sind in den nachstehenden Aufgaben (1) bis (6) natürliche Zahlen so einzusetzen, daß richtig gerechnete Aufgaben entstehen. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Zahlen und verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen bedeuten.

(1) $a + b + c = 21$,

(2) $b \cdot c = 42$,

(3) $c + d = 70 : b$,

(4) $e : a = d$,

(5) $c = 54 : 9$,

(6) $a + b + c + d + e + f = 60$

Finde eine solche Eintragung und überprüfe, ob sie alle Forderungen erfüllt!

Aufgabe 230514:

3	+		−		=7
·		+		·	
	·		:		=3
−		−		+	
	+		−		=6
=2		=4		=7	

In die leeren Felder der Abbildung sind natürliche Zahlen so einzusetzen, daß alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gelöst werden.

a) Gib eine solche Einsetzung an!

b) Es gibt insgesamt vier solche Einsetzungen. Erkläre, wie man diese finden kann und gib sie an!

23. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 230511:

Aus (3) und (4) folgt, dass Bernd nicht den 1. Preis errang. Da genau einer der drei Schüler einen 1. Preis erhielt, folgt dann aus (2):

Peter erhielt den 1. Preis. (5)

Wegen (1) erhielt Bernd nicht den 2. Preis; wegen (5) erhielt auch Peter nicht den 2. Preis. Daraus folgt:

Fred erhielt den 2. Preis. (6)

Da jeder der drei Schüler genau eine Auszeichnung bekam, folgt dann aus (5) und (6):

Bernd bekam das Diplom. (7)

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 230512:

Die Maßzahl des Dreiecksumfangs ergibt sich durch Addition seiner drei Seitenlängen. Nun ist die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen gleich dem Dreifachen der mittleren dieser drei Zahlen (denn die erste Zahl ist um 1 kleiner und die dritte um 1 größer als die mittlere Zahl).

Wegen $42 : 3 = 14$ beträgt mithin die mittlere Zahl im vorliegenden Fall 14, und die beiden anderen Zahlen betragen 13 und 15.

Die Seiten des Dreiecks, dessen Umfang 42 cm beträgt, sind also 13 cm, 14 cm und 15 cm lang. Diese drei Seitenlängen erfüllen auch die Bedingung, dass die Summe zweier Seitenlängen stets größer als die dritte Seitenlänge ist.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 230513:

Aus (5) folgt

$c = 6.$

Setzt man das in (2) ein, so ergibt sich $b \cdot 6 = 42$, also $b = 42 : 6$, d.h.

$b = 7.$

Damit folgt aus (1), dass $a + 7 + 6 = 21$, also $a = 21 - 13$, d.h.

$a = 8$

gilt. Aus (3) erhält man ferner $d + 6 = 70 : 7$, also $d = 10 - 6$, d.h.

$d = 4.$

Aus (4) erhält man daher $e : 8 = 4$, also $e = 4 \cdot 8$, d.h.

$e = 32.$

Aus (6) ergibt sich schließlich $8 + 7 + 6 + 4 + 32 + f = 60$, also $f = 60 - 57$, d.h.

$f = 3.$

Die so gefundenen Zahlen a, b, c, d, e, f sind paarweise verschieden und erfüllen (1) bis (6).

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 230514:

a) Siehe eine der unter b) erhaltenen Einsetzungen.

b) Wir bezeichnen die leeren Felder und die darin einzusetzenden Zahlen so mit a, b, c, d, e, f, g wie in der Abbildung angegeben.

Für jede der gesuchten Einsetzungen gilt dann:

Zeile 1:	3	+	a	−	b	=7
	·		+		·	
Zeile 2:	c	·	d	:	e	=3
	−		−		+	
Zeile 3:	f	+	g	−	7	=6
	=2		=4		=7	
	1. Spalte		2. Spalte		3. Spalte	

Da in der 2. Zeile durch e dividiert wird, gilt $e \neq 0$. Aus der 3. Spalte folgt $b \cdot e = 0$, wegen $e \neq 0$ also

$$b = 0.$$

Daher ergibt sich aus der 1. Zeile

$$a = 4.$$

Aus der 3. Zeile folgt $f + g = 13$. Da f und g natürliche Zahlen sind, kommen folglich für sie nur die Zahlen $0, 1, 2, ..., 13$ in Frage.

Nach der 1. Spalte ist $3 \cdot c = 2 + f$, also ist $2 + f$ durch 3 teilbar. Daher verbleiben nur die Möglichkeiten

$$f = 1, \quad c = 1, \quad g = 12; \tag{1}$$
$$f = 4, \quad c = 2, \quad g = 9; \tag{2}$$
$$f = 7, \quad c = 3, \quad g = 6; \tag{3}$$
$$f = 10, \quad c = 4, \quad g = 3; \tag{4}$$
$$f = 13, \quad c = 5, \quad g = 0. \tag{5}$$

Aus der 2. Spalte und $a = 4$ folgt $d - g = 0$, also $d = g$. Daher führen (1) bis (5) in der 2. Zeile auf folgende Gleichungen und Werte für e:

(1) $1 \cdot 12 : e = 3, \quad e = 4;$

(2) $2 \cdot 9 : e = 3, \quad e = 6;$

(3) $3 \cdot 6 : e = 3, \quad e = 6;$

(4) $4 \cdot 3 : e = 3, \quad e = 4;$

(5) $5 \cdot 0 : e = 3,$ kein möglicher Wert für e.

Mithin können nur die folgenden Einsetzungen alle genannten Aufgaben lösen:

3	+	4	−	0	=7
·		+		·	
1	·	12	:	4	=3
−		−		+	
1	+	12	−	7	=6
=2		=4		=7	

3	+	4	−	0	=7
·		+		·	
2	·	9	:	6	=3
−		−		+	
4	+	9	−	7	=6
=2		=4		=7	

3	+	4	−	0	=7
·		+		·	
2	·	9	:	6	=3
−		−		+	
4	+	9	−	7	=6
=2		=4		=7	

3	+	4	−	0	=7
·		+		·	
4	·	3	:	4	=3
−		−		+	
10	+	3	−	7	=6
=2		=4		=7	

Man bestätigt, dass bei diesen Einsetzungen alle waagerechten und alle senkrechten Aufgaben richtig gelöst sind.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission