22. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1982/1983

Aufgaben und Lösungen

22. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220721:

Ermittle alle geraden natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Zahl z ist fünfstellig, keine ihrer fünf Ziffern ist eine 0.

(2) Die aus den ersten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Quadratzahl.

(3) Die aus den letzten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Kubikzahl.

Hinweis: Ist a eine natürliche Zahl, so heißt a^2 ihre Quadratzahl und a^3 ihre Kubikzahl.

Aufgabe 220722:

In einer Diskussion über Dreiecke ABC wird für diese vorausgesetzt:

(1) Es gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$

(2) Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ steht senkrecht auf BC.

In dieser Diskussion behauptet Ursel: "Dann muß das Dreieck ABC rechtwinklig sein." Vera behauptet: "Nein, dann muß es gleichseitig sein." Werner behauptet: "Nein, dann braucht das Dreieck ABC weder rechtwinklig noch gleichseitig zu sein."

Untersuche für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

Aufgabe 220723:

Auf einer Kreislinie k seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, daß $ABCD$ ein Rechteck ist. Der Radius des Kreises k sei r genannt, die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bzw. H bezeichnet.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Umfang des Vierecks $EFGH$ stets $4r$ betragen muß!

Aufgabe 220724:

Für drei natürliche Zahlen a, b, c werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

(1) Es gilt $a < b < c$.

(2) Wenn a, b, c die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Kantenlängen eines Quaders sind, so hat der Quader das Volumen $270\,\text{cm}^3$, und die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 80 cm.

Untersuche, ob es natürliche Zahlen gibt, die diese Forderungen erfüllen, und ob diese Zahlen durch die Forderungen (1) und (2) eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so nenne diese Zahlen!

22. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 220721:

I. Wenn eine Zahl z die geforderten Eigenschaften hat, so folgt: Die aus den letzten drei Ziffern von z gebildete Zahl ist eine der Zahlen $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$; denn wegen $4^3 < 100$ und $10^3 > 999$ sind dies die einzigen dreistelligen Kubikzahlen.

   Da z und somit die letzte Ziffer von z gerade ist, verbleiben nur die Möglichkeiten 216 und 512 für die letzten drei Ziffern von z. Also endet die aus den ersten drei Ziffern von z gebildete Zahl auf 2 oder 5. Es gibt aber keine Quadratzahl, die auf 2 endet; denn endet eine natürliche Zahl a auf

   0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9, so endet ihre Quadratzahl auf
   0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4 bzw. 1.

   Daher verbleibt nur die Möglichkeit 512 für die letzten drei Ziffern von z, und die ersten drei Ziffern bilden eine auf 5 endende Quadratzahl, also eine der Zahlen 5^2, 15^2, 25^2, 35^2, ... Von diesen sind wegen $5^2 < 100$ und $35^2 > 999$ nur $15^2 = 225$ und $25^2 = 625$ dreistellig.

   Damit ist gezeigt, daß nur 22 512 und 62 512 die geforderten Eigenschaften haben können.

II. Sie haben diese Eigenschaften; denn sie sind, gerade und fünfstellig, sie enthalten die Ziffer 0 nicht, 225 sowie 625 sind Quadratzahlen, und 512 ist eine Kubikzahl.

Also sind genau 22 512 und 62 512 die gesuchten Zahlen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220722:

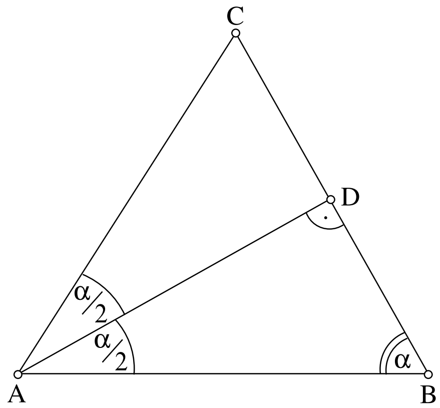
Ist $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$, so folgt aus (1), daß auch

(3) $\overline{\sphericalangle ABC} = \alpha$

gilt (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck).

Ist ferner D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$, so folgt aus (2) und (3), daß $\frac{\alpha}{2} + \alpha + 90° = 180°$ gilt (Winkelsumme im Dreieck ABD).

Daher ist $\frac{3}{2} \cdot \alpha = 90°$, also $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha = 60°$, nach (3) daher auch $\overline{\sphericalangle ABC} = 60°$.



Mithin ist das Dreieck ABC gleichseitig und somit nicht rechtwinklig. Folglich ist Veras Behauptung wahr, Ursels und Werners Behauptungen sind falsch.

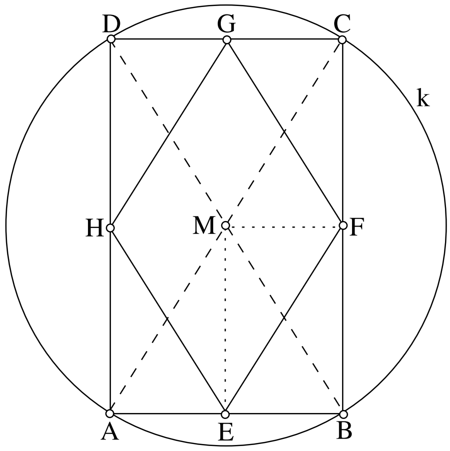
Andere Beweismöglichkeit: Aus (2) folgt

$$\overline{\sphericalangle BAD} = \overline{\sphericalangle CAD}, \qquad \overline{\sphericalangle ADB} = \overline{\sphericalangle ADC} = 90°.$$

Hiernach und wegen $\overline{AD} = \overline{AD}$ gilt $\Delta ABD \simeq \Delta ACD$ (wsw), also $\overline{AB} = \overline{AC}$. Daher und nach (1) ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220723:



Der Mittelpunkt von k sei M. Im gleichschenkligen Dreieck ABM (mit $\overline{AM} = \overline{BM} = r$) ist die Seitenhalbierende ME zugleich Höhe, also gilt $\overline{\sphericalangle MEB} = 90°$. Entsprechend folgt $\overline{\sphericalangle MFB} = 90°$.

Da ferner nach Voraussetzung auch $\overline{\sphericalangle EBF} = \overline{\sphericalangle ABC} = 90°$ ist, ist $EBFM$ ein Rechteck. In ihm sind die Diagonalen gleichlang, also gilt $\overline{EF} = \overline{MB} = r$. Entsprechend ergibt sich $\overline{FG} = r$, $\overline{GH} = r$ und $\overline{HE} = r$.

Damit ist die Behauptung $\overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HE} = 4r$ bewiesen.

Hinweis zur Korrektur: Wird ein Beweisweg gewählt, bei dem benutzt wird, daß M auf AC (und auf BD) liegt, so ist dies zuvor nachzuweisen oder als bekannt zu zitieren, z.B. als Folgerung $\overline{\sphericalangle AMC} = 180°$ aus dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220724:

Natürliche Zahlen a, b, c erfüllen genau dann die Forderung (2), wenn für sie die Gleichungen

(3) $abc = 270$,

(4) $a + b + c = 20$

gelten.

I. Wenn natürliche Zahlen a, b, c die Bedingungen (1),(3),(4) erfüllen, so folgt:

Nach (3) sind a, b, c von 0 verschieden; hiernach und wegen (1), (4) gilt

(5) $0 < a < b < c < 20$.

Die einzigen Teiler von 270 zwischen 0 und 20 sind

(6) 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15 und 18.

Die einzigen Möglichkeiten, aus diesen Zahlen zwei als a und b mit $a < b$ so auszuwählen, daß die - nach (4) erhaltene - Zahl $c = 20 - a - b$ auch $b < c$ erfüllt, sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Für diejenigen a, b, für die auch diese Zahl $c = 20 - a - b$ eine der Zahlen (6) ist, wird dann geprüft, ob auch $abc = 270$ gilt:

a	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	5
b	2	3	5	6	9	3	5	6	5	6	6
c	17	16	14	13	10	15	13	12	12	11	9
c in (6)?	nein				ja	ja	nein				ja
abc					90	90					270

Es ergibt sich, daß nur $a = 5$, $b = 6$, $c = 9$ die Bedingungen (1), (3), (4) erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt $5 < 6 < 9$, $5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$, $5 + 6 + 9 = 20$.

Damit ist gezeigt: Es gibt Zahlen, die die Forderungen (1), (2) erfüllen, sie sind durch diese Forderungen eindeutig bestimmt und lauten $a = 5$, $b = 6$, $c = 9$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission