21. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1981/1982

Aufgaben und Lösungen

21. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210911:

Während einer Fußballmeisterschaft spielten im Halbfinale die vier Mannschaften A, B, C und D. Über den Ausgang der Spiele und damit die Ermittlung der beiden Mannschaften für das Endspiel machten Kenner der vier Mannschaften folgende Voraussagen:

(1) Das Endspiel wird lauten: B gegen C.

(2) Das Endspiel wird nicht lauten: A gegen B.

(3) Das Endspiel wird lauten: C gegen D.

(4) Wenn A das Endspiel erreicht, dann erreicht B nicht das Endspiel.

(5) Das Endspiel wird von zwei der Mannschaften B, C, D bestritten.

Nach dem Halbfinale stellte sich heraus, daß genau zwei der Voraussagen (1) bis (5) falsch waren.

Zeigen Sie, daß es aufgrund dieser Angaben möglich ist, die beiden Mannschaften zu ermitteln, die das Endspiel erreichten!

Aufgabe 210912:

Herr Schulze trifft nach langer Zeit Herrn Lehmann und lädt ihn zu sich nach Hause ein. Unterwegs erzählt er Herrn Lehmann, daß er Vater von drei Kindern ist. Herr Lehmann möchte wissen, wie alt diese sind; ihm genügen Angaben in vollen Lebensjahren.

Herr Schulze antwortet: "Das Produkt der drei Altersangaben beträgt 72. Die Summe der drei Altersangaben ist meine Hausnummer. Wir sind gerade an unserem Haus angekommen; Sie sehen meine Nummer." Darauf erwidert Herr Lehmann: "Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln." "Das stimmt", meint Herr Schulze, "aber irgendwann zwischen der Geburt des zweiten und des dritten Kindes hat der Bau dieses Hauses stattgefunden. Ein Jahr und einen Tag lang haben wir an dem Haus gebaut." "Vielen Dank! Nun kann man die Altersangaben eindeutig ermitteln", beschließt Herr Lehmann das Gespräch.

Untersuchen Sie, ob es eine Zusammenstellung von drei Altersangaben gibt, für die alle Aussagen dieses Gespräches zutreffen! Untersuchen Sie, ob es nur eine solche Zusammenstellung, gibt! Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese!

Aufgabe 210913:

Elsa behauptet:

> ”Man kann die Zahl 1981 folgendermaßen darstellen: Man schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer geeigneten Zahl n der Reihe nach auf und setzt zwischen je zwei dieser Zahlen jeweils genau eines der vier Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$. Dabei braucht nicht überall dasselbe Operationszeichen gewählt zu werden; es brauchen auch nicht alle vier Operationszeichen vorzukommen. An der Reihenfolge der natürlichen Zahlen darf nichts geändert werden; Klammern und weitere Rechenzeichen sollen nicht auftreten. Das Ergebnis der so aufgeschriebenen Rechenaufgabe ist 1 981.”

Ist Elsas Behauptung wahr?

Aufgabe 210914:

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha = 70°$, $\overline{\sphericalangle ACB} = \gamma = 50°$ und $r = 5\,\text{cm}$, wobei r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

21. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 210911:

Wäre (2) falsch, so hätte das Endspiel A gegen B gelautet, und dann wären auch alle Aussagen (1), (3), (4), (5) falsch, in Widerspruch dazu, dass nur zwei falsche Aussagen auftreten.

Daher ist (2) wahr. Daraus folgt, dass auch (4) wahr ist; denn aus der Voraussetzung, A werde das Endspiel erreichen, ergibt sich wegen der Wahrheit von (2) die Schlussfolgerung, dass B nicht das Endspiel erreichte.

Wäre (5) falsch, so wäre auch (1) und (3) falsch, im Widerspruch dazu, dass genau zwei Aussagen (1) bis (5) falsch sind. Also ist (5) wahr.

Da (2), (4) und (5) wahr sind, sind genau die beiden Aussagen (1) und (3) falsch. Hiernach verbleibt von den Möglichkeiten, (5) zu erfüllen, genau die, dass das Endspiel B gegen D lautete.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 210912:

Die Aussage über das Produkt der drei Altersangaben trifft genau für die folgenden Zusammenstellungen zu:

1. Kind	72	36	24	18	12	9	18	12	9	**6**	8	6
2. Kind	1	2	3	4	6	8	2	3	4	**6**	3	4
3. Kind	1	1	1	1	1	1	2	2	2	**2**	3	3

Herrn Lehrmanns Aussage "Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln" trifft hiernach genau dann zu, wenn die Hausnummer 14 beträgt. Die nächste Aussage von Herrn Schulte trifft genau dann zu, wenn das 3. Kind um mindestens ein Jahr jünger ist als das 2. Kind.

Daher trifft die abschließende Aussage von Herrn Lehmann genau dann zu, wenn die Altersangaben 6, 6 und 2 lauten.

Daher ist gezeigt: Es gibt eine Zusammenstellung der drei Altersangaben, für die alle Aussagen des Gesprächs zutreffen; es gibt auch nur eine solche Zusammenstellung; sie lautet 6, 6 und 2.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 210913:

Elsas Behauptung ist wahr. Um das zu beweisen, genügt ein Beispiel. Derartige Beispiele lassen sich etwa durch folgende Überlegung zu finden:

Es gibt eine Zahl m so, dass die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis m die Zahle 1981 gerade übersteigt. Das ist bei $m = 63$ der Fall; denn er gilt

$$1 + 2 + 3 + ... + 63 = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$$

Wegen $2016 - 1981 = 35$ muss diese Summe um 35 verringert werden, um 1981 zu erreichen. Das kann z.B. dadurch geschehen, dass man die auf 63 folgenden 70 natürlichen Zahlen wechselweise addiert und subtrahiert, also

$$1 + 2 + 3 + ... + 63 + 64 - 65 + 66 - 67 + - ... + 132 - 133 = 1981$$

bildet.

Ein anderer Weg besteht darin, dass man statt +17 die Zahl -17 einfügt, womit sich die Summe um 34 vermindert. Man erhält auf diese Weise

$$1 + 2 + 3 + ... + 17 - 17 + 18 + ... + 64 = 1982$$

und gelangt durch Hinzufügen von +64 und -65 auf die gewünschte Zahl.

Ein weiteres Beispiel ist:

$$\begin{aligned} &1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 : 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 : 12 - 13 \cdot 14 \cdot 15 - 16 \cdot 17 + 18 \cdot 19 \\ &= 1 + 20 + 4620 - 2870 - 272 + 342 \\ &= 1981 \end{aligned}$$

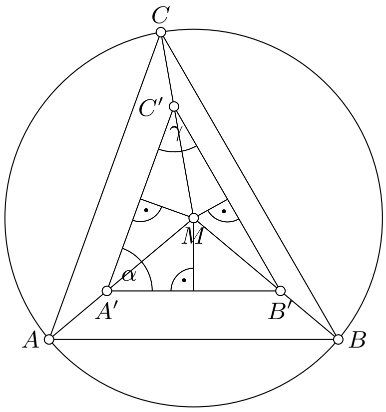
Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 210914:

I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Der Mittelpunkt seines Umkreises sei M; dann gilt $MA = MB = MC = r$.

Ist $A'B'C'$ ein Dreieck mit $\sphericalangle B'A'C' = \alpha$ und $\sphericalangle A'C'B' = \gamma$, so ist es zu $\triangle ABC$ ähnlich, kann also durch eine Bewegung in eine solche Lage gebracht werden, dass es aus dem Dreieck ABC durch eine zentrische Streckung mit dem Streckzentrum M und einem Streckungsfaktor $k > 0$ hervorgeht.

Dann gilt $MA' = MB' = MC' = kr$. Also ist M auch der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $A'B'C'$, d.h. der Schnittpunkt seiner Mittelsenkrechten.



II. Daher entspricht ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $A'B'C'$, in dem $\sphericalangle B'A'C' = \alpha$ und $\sphericalangle A'C'B' = \gamma$ gilt.

(2) Man konstruiert den Schnittpunkt M seiner Mittelsenkrechten.

(3) Man trägt auf den von M durch A', B' und C' gehenden Strahlen von M aus jeweils die Strecke der Länge r ab. Die erhaltenen Endpunkte bezeichnet man mit A, B bzw. C und verbindet sich untereinander.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach (3) gilt $MA = MB = MC = r$, also ist r der Umkreisradius des Dreiecks ABC. Nach (2) folgt weiter, dass M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $A'B'C'$ ist, demnach gilt $MA' = MB' = MC'$. Also gelten mit einer Zahl $k > 0$ die Gleichungen $MA' = MB' = MC' = kr$; folglich geht $\triangle ABC$ aus $\triangle A'B'C'$ durch eine zentrische Streckung hervor. Somit sind beide Dreiecke einander ähnlich und es gilt

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C' = \alpha \qquad ; \qquad \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B' = \gamma$$

IV. Konstruktionsschritt (1) ist (bei den gegebenen Werten von α und γ) ausführbar, aber nicht eindeutig; jedoch sind je zwei nach (1) zu erhaltende Dreiecke $A_1'B_1'C_1'$, $A_2'B_2'C_2'$ zueinander ähnlich. Also kann stets $A_2'B_2'C_2'$ durch eine Bewegung in eine solche Lage gebracht werden, dass es aus $A_1'B_1'C_1'$ durch eine zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M hervorgeht.

Hiernach ist die Figur aus den drei in (3) konstruierten Strahlen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Somit ist auch das in (3) anschließend konstruierte Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission