21. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1981/1982

Aufgaben und Lösungen

21. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210731:

In einer Mathematikstunde zeichnet der Lehrer genau zehn Vierecke an die Wandtafel und fordert die Schüler auf, Aussagen über diese zu treffen. Er erhält folgende Antworten:

Axel:	"An der Tafel befinden sich mindestens zwei Quadrate."
Beate:	"An der Tafel sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate."
Christa:	"An der Tafel ist genau ein Parallelogramm."
Detlev:	"An der Tafel sind genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke."

Der Lehrer teilt danach der Klasse mit, daß genau eine dieser vier Aussagen falsch war.

a) Von wem kam die falsche Aussage?

b) Ermittle für die einzelnen Arten von Vierecken jeweils die Anzahl der Vierecke dieser Art an der Tafel, soweit diese Anzahl aus den vorliegenden Angaben hervorgeht!

c) Skizziere, wie nach diesen Angaben das Tafelbild ausgesehen haben könnte!

Aufgabe 210732:

Ermittle alle Paare $(x; y)$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft, daß die Summe $x + y$ dieselbe Zahl wie das Produkt $x \cdot y$ und auch dieselbe Zahl wie der Quotient $x : y$ ist!

Aufgabe 210733:

Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ aus $a = 3,1$ cm, $\alpha = 100°$ und $\beta = 120°$! Dabei bezeichne a die Länge $\overline{AB} = \overline{BC}$; ferner bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD$ und β die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Drachenviereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 210734:

Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M. Auf k liegen die Punkte A und B derart, daß der Winkel $\sphericalangle BMA$ ein rechter ist. Weiterhin sei ein Punkt C durch folgende Bedingungen festgelegt:

(1) C liegt auf k.

(2) Es gilt $\overline{MB} = \overline{BC}$.

(3) Die Gerade durch A und C schneidet die Strecke MB in einem Punkt D.

Ermittle aus diesen Angaben die Größe des Winkels $\sphericalangle CDB$!

Aufgabe 210735:

Es sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm, und es sei P ein beliebiger Punkt im Innern dieses Parallelogramms, der nicht auf einer seiner Diagonalen liegt. Ferner sei S der Schnittpunkt der Parallelen durch B zu PD und durch D zu PB.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen das Viereck $ASCP$ stets ein Parallelogramm ist!

Aufgabe 210736:

Eine Flüssigkeit wird in kleinen, mittleren und großen Flaschen verkauft. In jede kleine Flasche passen genau 200 g, in jede mittlere genau 500 g und in jede große genau 1 000 g der Flüssigkeit. Jede gefüllte 200 g-Flasche kostet $1,20$ M, jede gefüllte 500 g-Flasche kostet $2,80$ M.

Der Preis der leeren 500 g-Flasche ist um 50% höher als der der leeren 200 g-Flasche. Die leere 1 000 g-Flasche wiederum ist um 50% teurer als die leere 500 g-Flasche.

Welcher Betrag wird eingespart, wenn anstelle von fünf gefüllten 200 g-Flaschen eine gefüllte 1 000 g-Flasche gekauft wird?

21. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 210731:

a) Angenommen, die Aussage von Axel wäre falsch. Dann befände sich an der Wandtafel entweder kein oder genau ein Quadrat; ferner wären dann die anderen drei Aussagen wahr. In dem Fall, daß kein Quadrat an der Tafel wäre, folgte: Nach den wahren Aussagen von Beate und Detlev wäre kein Trapez an der Tafel, nach der Aussage von Christa aber ein Parallelogramm. Das ist ein Widerspruch, da jedes Parallelogramm ein Trapez ist.

   In dem Fall, daß genau ein Quadrat an der Tafel wäre, folgte: Nach der Aussage von Beate wären zwei Rechtecke an der Tafel, nach der Aussage von Christa aber nur ein Parallelogramm. Das ist ein Widerspruch, da jedes Rechteck ein Parallelogramm ist.

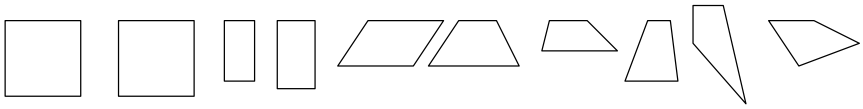
   Also ist Axels Aussage wahr; es befinden sich mindestens zwei Quadrate an der Tafel.

   Daher und weil jedes Quadrat ein Parallelogramm ist, ist Christas Aussage falsch. Die Aussagen von Beate und Detlev sind somit wahr.

b) Wären mindestens drei Quadrate an der Tafel, so wären folglich mindestens zwölf Trapeze an der Tafel. Das ist ein Widerspruch, da nur zehn Vierecke gezeichnet wurden.

   Daher waren genau zwei Quadrate an der Tafel. Hiernach waren genau vier Rechtecke an der Tafel. Da jedes Quadrat ein Rechteck ist, waren es also außer den zwei Quadraten noch genau zwei Rechtecke, die nicht Quadrate waren. Ferner waren genau acht Trapeze an der Tafel. Da jedes Rechteck ein Trapez ist, waren es also außer den vier Rechtecken noch genau vier Trapeze, die nicht Rechtecke waren. Schließlich waren somit von den zehn Vierecken außer den acht Trapezen genau zwei Vierecke, die nicht Trapeze waren.

c) Ein mögliches Tafelbild für diese Mathematikstunde ist:



Andere Lösungsansätze:

1. *Fallunterscheidung nach dem Wahrheitswert von Christas Aussage*: Angenommen, Christas Aussage wäre wahr. Dann wäre genau ein Parallelogramm an der Tafel, also höchstens ein Quadrat. Somit wäre Axels Aussage falsch. Daraus folgte wie im ersten Absatz der obigen Lösung ein Widerspruch. Also ist Christas Aussage falsch, die drei anderen dagegen sind wahr. Fortsetzung wie in der obigen Lösung.

2. *Fallunterscheidung nach der Anzahl der Quadrate*: Angenommen, es wäre kein Quadrat an der Tafel. Dann wären Axels und Christas Aussagen falsch, im Widerspruch zur Angabe des Lehrers. Angenommen, es wäre genau ein Quadrat an der Tafel, dann wäre Axels Aussage falsch, die drei anderen wären wahr. Nach Beates Aussage wären zwei Rechtecke an der Tafel, nach Christas Aussage aber (im Widerspruch dazu) nur ein Parallelogramm. Angenommen, es wären mindestens drei Quadrate an der Tafel. Dann wäre Christas Aussage falsch, die drei anderen Aussagen wären wahr. Nach Beates und Detlevs Aussagen wären dann aber mindestens zwölf Trapeze an der Tafel, im Widerspruch zur Aufgabe. Also waren genau zwei Quadrate an der Tafel; Christas Aussage war falsch, die anderen drei waren wahr. Fortsetzung wie oben.

Hinweise zur Korrektur: Die Anzahl der Parallelogramme geht aus den vorliegenden Angaben nicht eindeutig hervor; sie ist eine der Zahlen 4, 5, 6, 7, 8. Das obige Beispiel eines Tafelbildes ist so gewählt, daß es die falsche Antwort von Christa suggeriert (indem es testet, ob auch Rechtecke als Parallelogramme erkannt werden). Diese Angaben werden vom Schüler nicht verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210732:

I. Wenn ein Paar $(x; y)$ rationaler Zahlen den Bedingungen der Aufgabe genügt, dann gilt

   (1) $x + y = x \cdot y$ und

   (2) $x + y = x : y$.

   Aus (1) und (2) folgt

   (3) $x \cdot y = x : y$.

   Wäre $x = O$, so wäre nach (1) auch $y = O$ im Widerspruch zur Existenz von $x : y$. Also kann man (3) durch x dividieren und erhält $y = \frac{1}{y}$.

   Die einzigen rationalen Zahlen, die gleich ihrem Kehrwert sind, sind die Zahlen $+1$ und -1. Wäre $y = +1$, so ergäbe (1) den Widerspruch $x + 1 = x$. Also ist $y = -1$ und damit nach (1) $x - 1 = x$, $2x = 1$, also $x = \frac{1}{2}$. Daher kann nur das Paar $(\frac{1}{2}; -1)$ den Bedingungen der Aufgabe genügen.

II. Es genügt diesen Bedingungen; denn es gilt

$$\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-1) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} : (-1)$$

   Somit erfüllt genau das Paar $(\frac{1}{2}; -1)$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

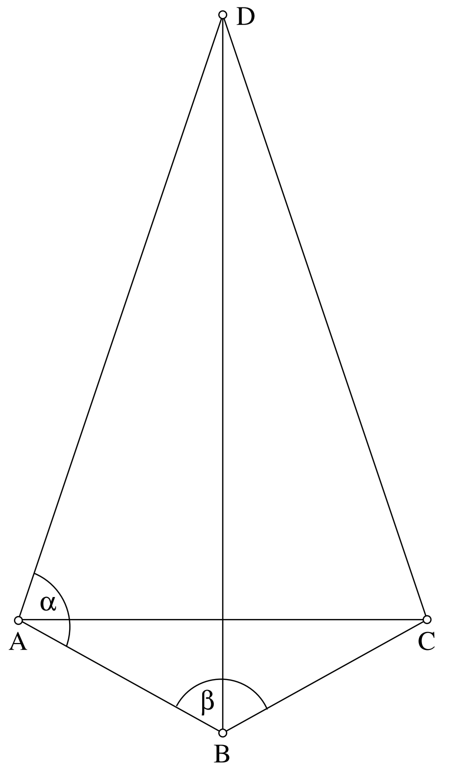
Lösung 210733:

I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Drachenviereck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Abbildung). Im Teildreieck ABC sind dann die Seitenlängen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und die Größe des eingeschlossenen Winkels $\sphericalangle ABC$ gegeben. Ferner ist BD Spiegelachse des Drachenvierecks $ABCD$, und es gilt $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = \alpha$. (Wegen $\alpha < 180°$, $\beta < 180°$ hat $ABCD$ weder bei B noch bei C eine einspringende Ecke. Also liegt D auf derselben Seite der Geraden durch A, B wie C und auf derselben Seite der Geraden durch B, C wie A. - Diese Angaben werden vom Schüler nicht verlangt.)

   Daraus folgt, daß ein Drachenviereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man konstruiere ein Dreieck ABC aus den Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ und der Winkelgröße $\sphericalangle ABC = \beta$.

(2) In A bzw. C trage man an AB bzw. BC jeweils einen Winkel der Größe α an (jeweils nach derjenigen Seite von AB bzw. BC, auf der der Punkt C bzw. A liegt - diese Angaben werden vom Schüler nicht verlangt). Ist D Schnittpunkt der freien Schenkel dieser beiden Winkel, so ist damit ein Viereck $ABCD$ konstruiert.



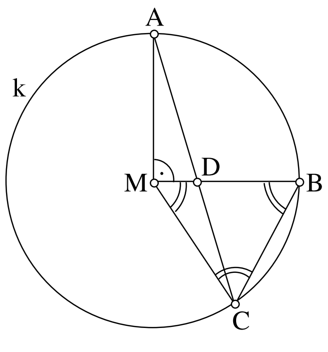
III. Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach (1) gilt $\overline{AB} = \overline{BC}$. Nach (2) ist $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 120°$ jeweils in den Dreiecken BAD bzw. BCD der größte Innenwinkel, liegt also der größten Seite gegenüber. Hiernach und wegen $\overline{BD} = \overline{BD}$ sind die Dreiecke BAD und BCD nach (ssw) kongruent, also ist $\overline{AD} = \overline{CD}$. Daher ist $ABCD$ ein Drachenviereck. In ihm haben AB, BC und $\sphericalangle ABC$ nach (1) sowie $\sphericalangle BAD$ nach (2) die verlangten Größen.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Danach ist Konstruktionsschritt (2) eindeutig ausführbar und ergibt auch wegen $\beta + 2\alpha < 360°$ einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt D. Daher ist durch die gegebenen Stücke ein Drachenviereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210734:



Da B und C auf k liegen, gilt $\overline{MB} = \overline{MC}$; nach Voraussetzung ist aber auch $\overline{MB} = \overline{BC}$.

Somit ist das Dreieck MCB gleichseitig, jeder seiner Innenwinkel beträgt mithin 60°.

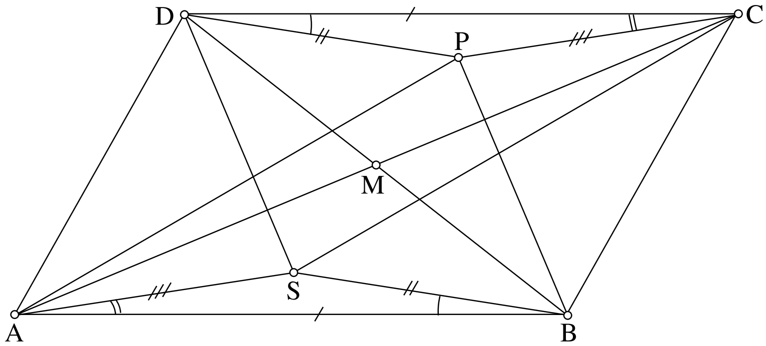
Läge C auf dem von A nach B führenden Viertelkreisbogen von k, so würde die Gerade durch A und C die Strecke MB nicht schneiden. Also liegt C außerhalb dieses Viertelkreisbogens, und es gilt $\sphericalangle AMC = 90° + 60° = 150°$. Da A und C auf k liegen, das Dreieck AMC also mit $\overline{MA} = \overline{MC}$ gleichschenklig ist, gilt $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA$. Hieraus folgt nach dem Innenwinkelsatz $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$.

Somit ergibt sich nach dem Außenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck MCD, $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CMD + \sphericalangle MCD = 60° + 15° = 75°$.

Andere Lösungsmöglichkeiten: Man kann auch $\sphericalangle CDB = \sphericalangle MDA$ (Scheitelwinkel), $\sphericalangle MDA = 90° - 15°$ (Innenwinkel im Dreieck ADM) verwenden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210735:



Das Viereck $DSBP$ ist auf Grund der Voraussetzungen ein Parallelogramm, und es gilt deshalb $\overline{SB} = \overline{DP}$, $SB \parallel DP$.

Aus $AB \parallel CD$ und $SB \parallel DP$ folgt $\overline{\sphericalangle SBA} = \overline{\sphericalangle PDC}$.

Wegen $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{SB} = \overline{DP}$ und $\overline{\sphericalangle SBA} = \overline{\sphericalangle PDC}$ gilt (nach wsw) $\Delta ABS \simeq \Delta CDP$. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt $\overline{AS} = \overline{CP}$ *).

In analoger Weise läßt sich $\overline{AP} = \overline{CS}$ nachweisen. Folglich ist das Viereck $ASCP$ ein Parallelogramm.

2. Lösungsweg:

M sei Diagonalenschnittpunkt im Parallelogramm $ABCD$. Dann ist, da die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren, M auch Diagonalenschnittpunkt im Parallelogramm $DSBP$.

Mithin ist M gemeinsamer Halbierungspunkt von AC und SP, und $ASCP$ ist daher ein Viereck, in dem die Diagonalen einander halbieren, also ein Parallelogramm.

*) *Hinweis:* Verwendet man (statt $\overline{AS} = \overline{CP}$) hier $\overline{\sphericalangle SAB} = \overline{\sphericalangle PCD}$, um hieraus und aus $AB \parallel CD$ auf $AS \parallel CP$ zu schließen, so muß für diesen Schluß noch (mindestens) erwähnt werden (ein Beweis wird nicht vom Schüler verlangt), daß S ebenfalls im Innern des Parallelogramms $ABCD$ liegt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210736:

Die leere 200 g-Flasche koste x Mark. Daraus folgt: Die leere 500 g-Flasche kostet 50% mehr, also $\frac{3}{2} \cdot x$ Mark. Ferner folgt:

Je 200 g der Flüssigkeit kosten $(1,20 - x)$ Mark,
je 500 g der Flüssigkeit kosten $(2,80 - \frac{3}{2} \cdot x)$ Mark.

Da der Preis für 500 g aber andererseits $\frac{5}{2}$ des Preises für 200 g betragen muß, ergibt sich

$$2,80 - \frac{3}{2} \cdot x = \frac{5}{2}(1,20 - x) = 3 - \frac{5}{2} \cdot x,$$

woraus man $x = 0,20$ erhält.

Also kostet die leere 200 g-Flasche 0,20 M, die leere 500 g-Flasche mithin 0,30 M und schließlich die leere 1000 g-Flasche $\frac{3}{2} \cdot 0,30\ \text{M} = 0,45\ \text{M}$.

Folglich kosten fünf leere 200 g-Flaschen $5 \cdot 0,20\ \text{M} = 1\ \text{M}$. Kauft man daher die 1000 g Flüssigkeit nicht in diesen fünf Flaschen, sondern statt dessen in einer Flasche zu 1000 g, so spart man $(1 - 0,45)\ \text{M} = 0,55\ \text{M}$ ein.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission