21. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1981/1982

Aufgaben und Lösungen

21. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210721:

a) Ein rechteckiges Flurstück ist durch einen Weg in zwei rechteckige Felder geteilt. Die Länge des Flurstücks, parallel zu diesem Weg gemessen, beträgt 105 m. Die Breite des ersten Teilfeldes beträgt 270 m, die des zweiten Teilfeldes 180 m. Der Weg ist 3 m breit.

Ermittle den Flächeninhalt des ersten Teilfeldes und den des zweiten Teilfeldes!

b) Das gesamte Flurstück wird nun zu einem großen Feld zusammengelegt, indem der Weg mit umgepflügt wird.

Ermittle den Flächeninhalt des so entstehenden großen Feldes!

c) Ermittle, wieviel Meter Draht für einen elektrischen Weidezaun gebraucht werden, wenn dieses Gesamtfeld vollständig mit zwei Drähten umspannt werden soll! Dabei sollen Durchhang und Befestigung des Drahtes dadurch berücksichtigt werden, daß der doppelte Umfang um ein Hundertstel erhöht wird. (Es ist auf volle Meter zu runden.)

Hinweis zu a) und b): Die Flächeninhalte sind in Hektar anzugeben, auf zwei Dezimalstellen gerundet.

Aufgabe 210722:

Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe 60°. Auf einem seiner Schenkel liege ein Punkt P. Von P sei das Lot auf den anderen Schenkel gefällt. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Halbierenden des gegebenen Winkels heiße Q.

Beweise, daß Q auf der Mittelsenkrechten der Strecke SP liegt!

Aufgabe 210723:

Ermittle alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b mit $0 < a < b$, deren größter gemeinsamer Teiler 15 und deren Produkt 7 875 ist!

Aufgabe 210724:

Albrecht Dürer bringt auf seinem Stich "Melancholie" ein "magisches Quadrat" aus den Zahlen 1 bis 16, d.h. ein Quadrat, in dem jede Zeile, jede Spalte und jede Diagonale denselben Summenwert hat.

16	3	2	13
			8
9			12
4			

In den beiden Mittelfeldern der untersten Zeile ist das Entstehungsjahr des Stiches abzulesen.

In der Abbildung ist dieses Quadrat mit unvollständiger Eintragung wiedergegeben.

Begründe, wie das magische Quadrat auszufüllen ist, und gib das Entstehungsjahr an!

21. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 210721:

a) Das erste Teilfeld hat die Länge 105 m und die Breite 270 m, wegen $105 \cdot 270 = 28\,350$ also den Flächeninhalt $28\,350\ \text{m}^2$, d.h. in der angegebenen Weise gerundet $2{,}84$ ha.

   Das zweite Teilfeld hat die Länge 105 m und die Breite 180 m, wegen $105 \cdot 180 = 18\,900$ also den Flächeninhalt $18\,900\ \text{m}^2$, d.h. $1{,}89$ ha.

b) Das gesamte Flurstück hat die Länge 105 m und wegen $270 + 3 + 180 = 453$ die Breite 453 m, wegen $105 \cdot 453 = 47\,565$ also den Flächeninhalt $47\,565\ \text{m}^2$, d.h. gerundet $4{,}76$ ha.

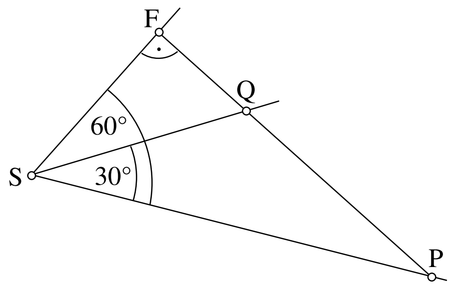
   Man kann auoh so rechnen: Der Weg hat wegen $105 \cdot 3 = 315$ gerundet den Flächeninhalt $0{,}03$ ha. Wegen $2{,}84 + 0{,}03 + 1{,}89 = 4{,}76$ ergibt sich so der Flächeninhalt $4{,}76$ ha.

c) Das gesamte Flurstück hat wegen $2 \cdot (105 + 453) = 2 \cdot 558 = 1\,116$ den Umfang $1\,116$ m. Für den Zaun werden wegen $2 \cdot 1\,116 = 2\,232$ und wegen $2\,232 : 100 = 22{,}32$ sowie $2\,232 + 22{,}32 = 2\,254{,}32$ daher gerundet $2\,254$ m Draht gebraucht.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210722:

Der Fußpunkt des Lotes von P auf den anderen Schenkel sei F.



Nach Voraussetzung ist $\overline{\sphericalangle FSP} = 60°$ und $\overline{\sphericalangle PFS} = 90°$;

wegen des Winkelsummensatzes, angewandt auf das Dreieck SPF, folgt $\overline{\sphericalangle SPF} = 30°$.

Außerdem ist nach Voraussetzung $\overline{\sphericalangle QSP} = 30°$; also ist das Dreieck SPQ gleichschenklig mit $\overline{SQ} = \overline{PQ}$.

Folglich ist Q ein Punkt der Mittelsenkrechten von SP. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210723:

I. Wenn ein Paar $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so folgt:

   (1) Es gibt natürliche Zahlen m, n mit $a = 15m$, $b = 15n$.

   (2) Wegen $0 < a < b$ folgt $0 < m < n$,

(3) wegen $ab = 7\,875$ folgt $15m \cdot 15n = 7\,875$, also $225mn = 7\,875$, $mn = 35$. (3)

Da 35 die Primfaktorzerlegung $35 = 5 \cdot 7$ hat, gibt es für (2), (3) nur die Möglichkeiten, daß entweder $m = 1$, $n = 35$ oder $m = 5$, $n = 7$ gilt. Aus (1) folgt daher, daß nur die Paare $(15; 525)$, $(75; 105)$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt $0 < 15 < 525$, $0 < 75 < 105$; wegen der Primfaktorzerlegungen $15 = 3 \cdot 5$, $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, $75 = 3 \cdot 5^2$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ ist $3 \cdot 5 = 15$ der ggT von 15 und 525 sowie auch der ggT von 75 und 105; schließlich gilt $15 \cdot 525 = 7\,875$ und $75 \cdot 105 = 7\,875$. Daher erfüllen genau die Paare $(15; 525)$ und $(75; 105)$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210724:

Wegen $16 + 3 + 2 + 13 = 34$ ist die Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme 34.

Daraus folgt, daß die fehlende Zahl in der ersten Spalte 5 und die fehlende Zahl in der vierten Spalte 1 beträgt. Für die restlichen 6 Felder bleiben die Zahlen 6, 7, 10, 11, 14 und 15 übrig.

Die Summe der beiden fehlenden Zahlen der vierten Zeile beträgt 29, sie läßt sich nur mit den Zahlen 15 und 14 bilden; die Summe der fehlenden Zahlen der dritten Zeile, beträgt 13, sie läßt sich nur mit den Zahlen 6 und 7 bilden. Die Summe der restlichen Zahlen 10 und 11 beträgt 21. Sie ergibt zusammen mit den bereits in der zweiten Zeile stehenden Zahlen die verlangte Summe 34.

Die Anordnung der beiden mittleren Zahlen der zweiten bzw. dritten Zeile muß nun so erfolgen, daß auch in beiden Diagonalen die Summe 34 erreicht wird. Da jeder der beiden Diagonalen zu dieser Summe noch 17 fehlt, kann die Anordnung nur

11	10
7	6

oder

10	11
6	7

lauten.

In der zweiten Spalte fehlt an der Summe 34 noch 16 oder 17, je nachdem, ob die zweite Zahl der vierten Zelle 14 oder 15 lautet. Daher erfüllt nur die zweite der oben angeführten Anordnungen die gestellten Bedingungen. Somit ergibt sich als einzige Möglichkeit die folgende Eintragung:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Sie erfüllt alle Bedingungen eines magischen Quadrates. Das Entstehungsjahr des Stiches lautet mithin 1514.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission