21. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1981/1982

Aufgaben und Lösungen

21. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210711:

Die FDJler einer Schule haben sich vorgenommen, das Gelände ihrer Schule umzugestalten. Dabei soll eine rechteckige Rasenfläche von 45 m Länge und 26 m Breite mit einem Weg von 2 m Breite umgeben werden. Der Weg soll außerhalb der Rasenfläche verlaufen und ringsum an sie angrenzen. Die Fläche, die von dem Rasen und dem Weg zusammen eingenommen wird, soll insgesamt wieder die Gestalt eines Rechtecks haben.

a) Berechne den Flächeninhalt des vorgesehenen Weges!

b) Wieviel Gehwegplatten müssen auf diesem Weg insgesamt ausgelegt werden, wenn er vollständig von Gehwegplatten bedeckt werden soll und wenn man für jeden Quadratmeter des Weges genau 16 Platten benötigt?

Aufgabe 210712:

Andreas sagt zu seinem Freund:

> "Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere Hand eine ungerade Anzahl Hölzchen! Verdopple in Gedanken die Anzahl der Hölzchen in der linken und verdreifache die Anzahl der Hölzchen in der rechten Hand! Addiere die beiden Produkte und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann mit Sicherheit sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl von Hölzchen hast."

Untersuche, ob man wirklich allein aus dem von dem Freund genannten Ergebnis mit Sicherheit die von Andreas angekündigte Aussage erhalten kann!

Aufgabe 210713:

Zur Vorbereitung eines Sportfestes soll für die Schülerinnen Andrea, Beate, Christine, Doris, Eva, Frauke und Gerda eine Reihenfolge festgelegt werden. Dabei soll stets von zwei verschieden großen Schülerinnen die größere vor der kleineren stehen. Sind aber zwei Schülerinnen gleichgroß, so soll stets diejenige, deren Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor der anderen stehen.

Der Organisator, der eine derartige Reihenfolge festlegen soll, kennt die Schülerinnen nicht, aber er meint, sich an folgende Informationen erinnern zu können:

(1) Es ist wahr, daß Doris um genau 2 cm kleiner als Christine ist.

(2) Es ist falsch, daß Andrea nicht dieselbe Größe wie Gerda hat.

(3) Es ist nicht wahr, daß keine der Schülerinnen kleiner als Frauke ist.

(4) Es ist wahr, daß Eva kleiner als Doris, aber größer als Frauke ist.

(5) Es ist unwahr, daß Frauke größer als Christine ist.

(6) Es ist nicht falsch, daß Christine um genau 2 cm größer als Gerda ist und daß Christine größer als Eva ist.

Untersuche, ob es mehr als eine, genau eine oder keine Möglichkeit für die Reihenfolge der Schülerinnen gibt, bei der alle Informationen (1) bis (6) zutreffen!

Falls es sie gibt, ermittle alle möglichen Reihenfolgen, die den genannten Bedingungen entsprechen!

Aufgabe 210714:

In einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ wird eine beliebige Diagonale gezeichnet.

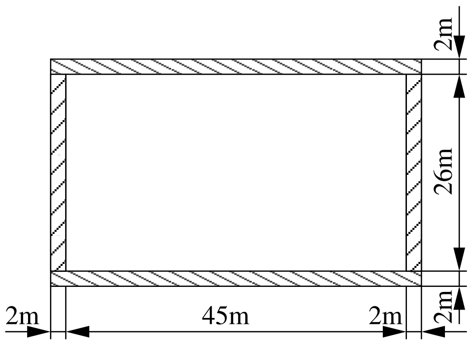
Beweise, daß diese Diagonale zu einer der Seiten des Fünfecks parallel ist!

Hinweis: Ein Fünfeck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten zueinander gleichlang und alle seine Innenwinkel zueinander gleichgroß sind.

21. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 210711:



a) Der Flächeninhalt des Weges ergibt sich, wenn man den Flächeninhalt des Rasens von dem Flächeninhalt des Rechtecks subtrahiert, den Weg und Rasen zusammen einnehmen. Dessen Seitenlängen sind jeweils um 4 m länger als die Seitenlängen 45 m bzw. 26 m des Rasens; sie betragen also 49 m bzw. 30 m.

Daher beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$\begin{aligned} 49\text{ m}\cdot 30\text{ m} - 45\text{ m}\cdot 26\text{ m} &= 1470\text{ m}^2 - 1170\text{ m}^2 \\ &= 300\text{ m}^2. \end{aligned}$$

Andere Lösungsmöglichkeiten ergeben sich, wenn man die Fläche des Weges aus Teilflächen zusammensetzt. Die in der Abbildung dargestellte Zusammensetzung z.B. führt auf

$$2\cdot 49\text{ m}\cdot 2\text{ m} + 2\cdot 26\text{ m}\cdot 2\text{ m} = 196\text{ m}^2 + 104\text{ m}^2 = 300\text{ m}^2.$$

b) Wegen $300\cdot 16 = 4\,800$ sind insgesamt 4 800 Platten erforderlich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210712:

Wenn der Freund in der linken Hand eine gerade und in der rechten Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen hat, so gilt:

Das erste Produkt ist gerade, weil einer seiner Faktoren gerade ist. Das zweite Produkt ist ungerade, weil beide Faktoren ungerade sind. Die Summe aus diesen beiden Produkten, einer geraden und einer ungeraden Zahl, ist folglich ungerade.

Wenn aber der Freund in der linken Hand eine ungerade Anzahl und in der rechten Hand eine gerade Anzahl von Hölzchen hat, so gilt:

Beide Produkte sind gerade; denn in jedem dieser Produkte kommt ein geradzahliger Faktor vor. Also ist auch ihre Summe eine gerade Zahl.

Daher kann man mit Sicherheit die von Andreas angekündigte Aussage erhalten:

Wenn der Freund eine ungerade Zahl als Ergebnis nennt, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in der linken Hand; wenn er aber eine gerade Zahl als Ergebnis nennt, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in der rechten Hand.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210713:

Bezeichnet man für jede Schülerin ihre in Zentimeter gemessene Größe mit dem Anfangsbuchstaben ihres Vornamens, so lauten die Informationen:

(1) Es gilt $D = C - 2$.

(2) Es gilt $A = G$.

(3) Es gilt mindestens eine der Ungleichungen

$$A < F,\ B < F,\ C < F,\ D < F,\ E < F,\ G < F.$$

(4) Es gilt $E < D$ und $E > F$.

(5) Es gilt $F \leq C$.

(6) Es gilt $C = G + 2$ und $C > E$.

I. Angenommen, bei einer Reihenfolge der Schülerinnen treffen alle Informationen (1) bis (6) zu.

(7) Aus (1) und (6) folgt dann $D = G = C - 2$.

(8) Aus (2) und (7) folgt $A = D = G$.

(9) Aus (1), (4) und (8) folgt $C > A = D = G > E > F$.

(10) Aus (3) und (9) folgt $B < F$. Daher können nur bei der Reihenfolge $C > A = D = G > E > F > B$ alle Informationen (1) bis (6) zutreffen.

II. Wenn diese Reihenfolge vorliegt und überdies $A = D = G = C - 2$ ist, so gilt:

Es ist $D = C - 2$, also ist (1) erfüllt.

Es ist $A = G$, also ist (2) erfüllt.

Es ist $B < F$, also ist (3) erfüllt.

Es ist $E < D$ und $E > F$, also ist (4) erfüllt.

Es ist $F < C$, also ist (5) erfüllt.

Es ist $C = G + 2$ und $C > E$, also ist (6) erfüllt.

Damit ist bewiesen, daß es genau eine Reihenfolge gibt, bei der alle Informationen (1) bis (6) zutreffen. Sie lautet wie in (10) angegeben.

Hinweis zur Korrektur: Da die Aufgabe überbestimmt ist, sind in der ”Probe” (Lösungsteil II) auch diejenigen Informationen als erfüllt nachzuweisen, die in der ”Lösungsfindung” (dem Eindeutigkeitsnachweis, Lösungsteil I) nicht herangezogen wurden. Statt der Einzelaufzählung von (1) bis (6) ist dabei auch eine mehr zusammenfassende Darstellung zulässig, doch sollte erkennbar sein, daß insbesondere (3) und (5) gerade wegen $B < F$ bzw. $F < C$ erfüllt sind.

Diese Betrachtungen könnten auch eine weiterführende Besprechung der Aufgabe z.B. in Arbeitsgemeinschaften anregen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210714:

1. Lösungsweg:

Die Bezeichnung der Ecken des Fünfecks kann so gewählt werden, daß AC die zu betrachtende Diagonale ist. Da die Winkelsumme im n-Eck stets $(n-2) \cdot 180°$ beträgt, hat jeder der Innenwinkel des Fünfecks $ABCDE$ (siehe Abbildung) die Größe

$$\frac{1}{5} \cdot (5-2) \cdot 180° = 108°.$$

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{BC}$. Daher gilt $\overline{\sphericalangle BAC} = \overline{\sphericalangle BCA}$, nach dem Innenwinkelsatz also $\overline{\sphericalangle BAC} = \overline{\sphericalangle BCA} = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°$.

Daraus folgt $\overline{\sphericalangle CAE} = 108° - 36° = 72°$.

Also ergänzen sich $\sphericalangle CAE$ und $\sphericalangle AED$ zu 180°. Da sie (für die Gerade durch A, E, die von AC und ED geschnitten wird) entgegengesetzt liegende Winkel sind, folgt hieraus $AC \parallel ED$.

2. Lösungsweg:

Die Innenwinkel des Fünfecks bei E und D sind einander gleichgroß, d.h. es gilt

(1) $\overline{\sphericalangle AED} = \overline{\sphericalangle CDE}$.

Ebenso ist $\overline{\sphericalangle BAE} = \overline{\sphericalangle BCD}$. Wegen $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt ferner $\overline{\sphericalangle BAC} = \overline{\sphericalangle BCA}$.

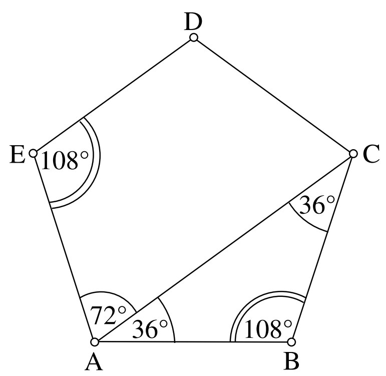
Daraus folgt durch Subtraktion

(2) $\overline{\sphericalangle CAE} = \overline{\sphericalangle ACD}$.

Ferner beträgt im Viereck $ACDE$ die Innenwinkelsumme 360°. Hieraus und aus (1), (2) folgt

$$\begin{aligned} 360° &= \overline{\sphericalangle CAE} + \overline{\sphericalangle ACD} + \overline{\sphericalangle CDE} + \overline{\sphericalangle AED} \\ &= 2\overline{\sphericalangle CAE} + 2\overline{\sphericalangle AED}. \end{aligned}$$

Daher gilt $\overline{\sphericalangle CAE} + \overline{\sphericalangle AED} = 180°$. Wie im 1. Lösungsweg folgt hieraus $AC \parallel ED$.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission