20. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1980/1981

Aufgaben und Lösungen

20. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200731:

Von einer natürlichen Zahl z wird gefordert, daß sie sich in vier Summanden zerlegen läßt, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

> Der erste Summand beträgt zwei Drittel der Zahl z,
> der zweite Summand beträgt ein Viertel des ersten Summanden,
> der dritte Summand beträgt ein vier Fünftel es zweiten Summanden,
> der vierte Summand beträgt ein Viertel des dritten Summanden,
> der dritte Summand beträgt 48.

Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind!

Ist dies der Fall, so ermittle alle natürlichen Zahlen z und ihre Zerlegungen in vier Summanden, die diese Bedingungen erfüllen!

Aufgabe 200732:

Gegeben seien sieben Strecken mit den Längen 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm und 15 cm.

a) Gib die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten an, drei von diesen sieben Strecken auszuwählen! Dabei sollen solche Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge der ausgewählten Strecken unterscheiden, nicht als verschieden gewertet werden.

b) Gib unter den in a) gefundenen Möglichkeiten alle diejenigen an, bei denen aus den Längen der drei ausgewählten Strecken als Seitenlänge ein Dreieck konstruiert werden kann!

c) Berechne, wieviel Prozent der in a) gefundenen Möglichkeiten die in b) gefundenen Möglichkeiten sind! (Der Prozentsatz ist auf eine Dezimale nach dem Komma gerundet anzugeben.)

Aufgabe 200733:

Es sei S der Scheitel eines spitzen Winkels, dessen Schenkel mit s_1 und s_2 bezeichnet seien. Es werde vorausgesetzt, daß auf dem Strahl s_1 zwei voneinander und von S verschiedene Punkte A, B liegen und daß auf dem Strahl s_2 drei voneinander und von S verschiedene Punkte C, D, E liegen, wobei folgendes gilt:

Die Punkte S, A, B sind auf s_1 in dieser Reihenfolge angeordnet; die Punkte S, C, D, E sind auf s_2 in dieser Reihenfolge angeordnet; es ist

$$\overline{SC} = \overline{CA} = \overline{AD} = \overline{DB} = \overline{BE} \text{ und}$$
$$\overline{SB} = \overline{SE}.$$

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\sphericalangle BSE$!

Aufgabe 200734:

Horst, der aktiv Sport treibt, erzählt seinem Freund: "In vier Jahren habe ich insgesamt an 21 Wettkämpfen teilgenommen, in jedem Jahr an mindestens einem Wettkampf. Dabei war die Anzahl der Wettkämpfe von Jahr zu Jahr größer; im vierten Jahr war sie genau dreimal so groß wie im ersten Jahr."

Untersuche, ob es für die Wettkämpfe in den einzelnen Jahren Anzahlen gibt, die Horsts Angaben entsprechen, und ob aus den Angaben diese Anzahlen eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese vier Anzahlen!

Aufgabe 200735:

Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ wird vorausgesetzt, daß sich die beiden Kreise, die die Seiten AD bzw. BC des Trapezes als Durchmesser haben, von außen berühren.

Beweise aus dieser Voraussetzung, daß die Summe der Längen der Seiten AB und CD gleich der Summe der Längen der Seiten AD und BC ist!

Aufgabe 200736:

In eine Leihbibliothek kamen während eines Tages Schüler aus jeder der Klassenstufen 6, 7 und 8; dies waren insgesamt 85 Schüler. Genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 6, genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 7 und genau ein Viertel der Schüler der Klassenstufe 8, das waren insgesamt 26 Schüler, entliehen Bücher aus der Bibliotheksreihe "Mathematische Schülerbücherei". Außerdem ergab sich aus Gesprächen, daß genau ein Zehntel der Schüler der Klassenstufe 7 an der Mathematikolympiade des Kreises teilgenommen hatte.

Untersuche, ob aus diesen Angaben die Anzahlen der Schüler der Klassenstufe 6, der Klassenstufe 7 und der Klassenstufe 8 eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese drei Anzahlen!

20. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 200731:

Wenn eine natürliche Zahl z so in vier Summanden s_1, s_2, s_3, s_4 zerlegt ist, daß die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, so gilt

(1) $z = S_1 + s_2 + s_3 + s_4$,

(2) $s_1 = \frac{2}{3}z$,

(3) $s_2 = \frac{1}{4}s_1$,

(4) $s_3 = \frac{4}{5}s_2$,

(5) $s_4 = \frac{1}{4}s_3$,

(6) $s_3 = 48$,

Aus (5) und (6) folgt

(7) $s_4 = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.

Aus (6) und (4) folgt

(8) $48 = \frac{4}{5} \cdot s_2$, also $s_2 = \frac{4}{5} \cdot 48 = 60$.

Aus (8) und (3) folgt

(9) $60 = \frac{1}{4} \cdot s_1$, also $s_1 = 4 \cdot 60 = 240$.

Aus (1) und (6) bis (9) folgt $z = 240 + 60 + 48 + 12 = 360$.

Daher kann nur die Zahl $z = 360$ und ihre Zerlegung in $s_1 = 240$, $s_2 = 60$, $s_3 = 48$, $s_4 = 12$ die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen.

Sie erfüllt diese Bedingungen; denn es gilt

$$\begin{aligned} 360 &= 240 + 60 + 48 + 12, \\ 240 &= \frac{2}{3} \cdot 360, \\ 60 &= \frac{1}{4} \cdot 240, \\ 48 &= \frac{4}{5} \cdot 60, \\ 12 &= \frac{1}{4} \cdot 48, \end{aligned}$$

und der dritte Summand beträgt $s_3 = 48$.

Korrekturhinweis: Da die Aufgabe überbestimmt ist, beachte man:

1. Zur Ermittlung von z, s_1, ..., s_4 können auch andere als die oben gewählten Bedingungen herangezogen werden, z.B. für z nicht (1), (6) bis (9), sondern (2), (9).

2. Die Probe muß auch die bei der Ermittlung von z, s_1, ..., s_4. nicht verwendeten Bedingungen berücksichtigen (im oben gewählten Lösungsweg ist also auch (2) als erfüllt nachzuweisen), selbst wenn die bei der Ermittlung verwendeten Bedingungen äquivalent umgeformt wurden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200732:

Die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen der drei ausgewählten Strecken seien jedesmal a, b, c genannt. Wegen der Unabhängigkeit von ihrer Reihenfolge kann dabei $a < b < c$ angenommen werden.

Mit diesen Bezeichnungen gibt es genau die in der folgenden Tabelle in den Spalten a, b, c angegebenen Auswahlmöglichkeiten. Aus den Längen der drei ausgewählten Strecken als Seitenlängen kann genau dann ein Dreieck konstruiert werden, wenn die drei Dreiecksungleichungen

$$a + b > c, \qquad (1)$$
$$b + c > a, \qquad (2)$$
$$c + a > b \qquad (3)$$

gelten. Wegen $a < b < c$ sind (2) und (3) stets erfüllt. In der letzten Spalte der folgenden Tabelle ist jeweils angegeben, ob auch (1) erfüllt ist.

a	b	c	Gilt $a + b > c$?
1	3	5	Nein
1	3	7	Nein
1	3	9	Nein
1	3	11	Nein
1	3	15	Nein
1	5	7	Nein
1	5	9	Nein
1	5	11	Nein
1	5	15	Nein
1	7	9	Nein
1	7	11	Nein
1	7	15	Nein
1	9	11	Nein
1	9	15	Nein
1	11	15	Nein

a	b	c	Gilt $a + b > c$?
3	5	7	Ja
3	5	9	Nein
3	5	11	Nein
3	5	15	Nein
3	7	9	Ja
3	7	11	Nein
3	7	15	Nein
3	9	11	Ja
3	9	15	Nein
3	11	15	Nein

a	b	c	Gilt $a + b > c$?
5	7	9	Ja
5	7	11	Ja
5	7	15	Nein
5	9	11	Ja
5	9	15	Nein
5	11	15	Ja
7	9	11	Ja
7	9	15	Ja
7	11	15	Ja
9	11	15	Ja

Daraus folgt:

Die in a) gesuchte Anzahl beträgt 35,
die in b) gesuchte Anzahl beträgt 11,
der in c) gesuchte Prozentsatz beträgt $\frac{11 \cdot 100}{35}\% \approx 31,4\%$.

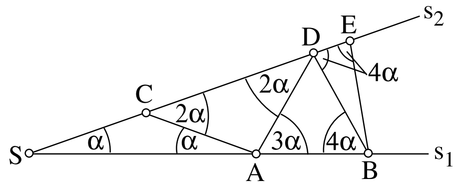
Korrekturhinweis: Das Auszählen kann auch teilweise durch zusammenfassende Überlegungen vereinfacht werden, die z.B. für a) auf die Anzahl

$$(5 + 4 + 3 + 2 + 1) + (4 + 3 + 2 + 1) + (3 + 2 + 1) + (2 + 1) + 1 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$$

führen. Doch wird dies (zur Bewertung als vollständige Lösung) nicht verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200733:



Aus den Voraussetzungen folgt

$\overline{\sphericalangle CAS} = \overline{\sphericalangle ASC} = \alpha$	da ΔACS gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{CS}$ ist,
$\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle CAS} + \overline{\sphericalangle ASC} = 2\alpha$	Außenwinkel des Dreiecks ACS,
$\overline{\sphericalangle ADC} = \overline{\sphericalangle ACD} = 2\alpha$	da ΔACD gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{AD}$ ist,
$\overline{\sphericalangle BAD} = \overline{\sphericalangle ADC} + \overline{\sphericalangle ASC} = 3\alpha$	Außenwinkel des Dreiecks ADS,
$\overline{\sphericalangle ABD} = \overline{\sphericalangle DAB} = 3\alpha$	da ΔABD gleichschenklig mit $\overline{AD} = \overline{BD}$ ist,
$\overline{\sphericalangle BDE} = \overline{\sphericalangle ABD} + \overline{\sphericalangle ASC} = 4\alpha$	Außenwinkel des Dreiecks BDS,
$\overline{\sphericalangle BED} = \overline{\sphericalangle BDE} = 4\alpha$	da ΔBDE gleichschenklig mit $\overline{BD} = \overline{BE}$ ist,
$\overline{\sphericalangle EBS} = \overline{\sphericalangle BED} = 4\alpha$	da ΔBES gleichschenklig mit $\overline{BS} = \overline{ES}$ ist,

sowie aus der Winkelsumme im Dreieck BES: $\alpha + 4\alpha + 4\alpha = \overline{\sphericalangle BSE} + \overline{\sphericalangle BED} + \overline{\sphericalangle EBS} = 180°$ und damit $\alpha = 20°$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200734:

Sind a, b, c, d Horsts Angaben entsprechende Anzahlen der Wettkämpfe im 1., 2., 3. bzw. 4. Jahr, so gilt

$$0 < a < b < c < d, \qquad (1)$$
$$d = 3a, \qquad (2)$$
$$a + b + c + d = 21. \qquad (3)$$

Wäre $a \geq 4$, so folgte aus (1), daß $b \geq 5$, $c \geq 6$, $d \geq 7$, also $a + b + c + d \geq 22$ wäre, im Widerspruch zu (3).

Wäre $a \leq 2$, so folgte aus (2), daß $d \leq 6$ wäre; aus (1) folgte dann $c \leq 5$, $b \leq 4$, also $a + b + c + d \leq 17$, in Widerspruch zu (3)

Also muß $a = 3$ (4) sein. Nach (2) folgt $d = 9$ (5), nach (1) folgt $b \geq 4$ (6).

Wäre $b > 4$, so folgte aus (2), daß $c > 5$, also $a + b + c + d > 21$ wäre, im Widerspruch zu (3). Daher muß $b = 4$ (6) sein, und aus (3), (4), (S), (6) folgt $c = 5$. Also können nur die Anzahlen

3 Wettkämpfe im ersten Jahr,
4 Wettkämpfe im zweiten Jahr,
5 Wettkämpfe im dritten Jahr,
9 Wettkämpfe im vierten Jahr

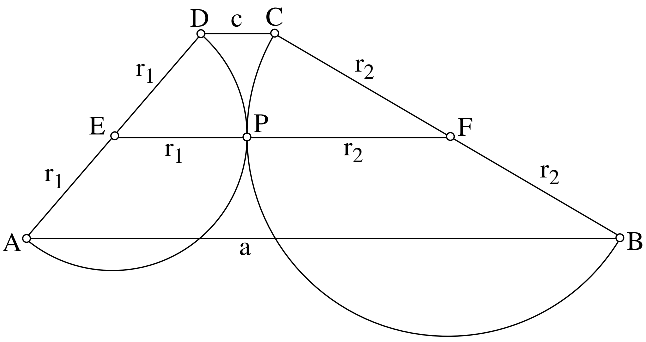
Horsts Angaben entsprechen (7).

Sie entsprechen ihnen; denn es gilt $0 < 3 < 4 < 5 < 9$; $9 = 3 \cdot 3$; $3 + 4 + 5 + 9 = 21$. Daher gibt es Anzahlen, die Horsts Angaben entsprechen, sie gehen eindeutig aus den Angaben hervor und lauten wie in (7) angegeben.

Hinweis: Die Lösung läßt sich auch mit Hilfe einer Tabelle gewinnen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200735:



Die Mittelpunkte der genannten Kreise seien E bzw. F, ihre Radien r_1 bzw. r_2.

Da EF die Mittellinie des Trapezes ist, gilt $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$.

Ferner ist EF die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier sich von außen berührender Kreise mit den Radien r_1, r_2, also gilt $\overline{EF} = r_1 + r_2$. Daraus folgt

$$\overline{AB} + \overline{CD} = 2 \cdot EF = 2(r_1 + r_2).$$

Andererseits haben die Durchmesser AD bzw. BC der genannten Kreise die Längen $\overline{AD} = 2r_1$, $\overline{BC} = 2r_2$. Somit gilt

$$\overline{AD} + \overline{BC} = 2r_1 + 2r_2 = 2(r_1 + r_2) = \overline{AB} + \overline{CD}. \;\square$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200736:

Sind a, b, c die Anzahlen der Schüler der Klassenstufe 6, 7, 8 in dieser Reihenfolge, so folgt aus den Angaben:

Es sind a und b durch 3 teilbar, c ist durch 4 teilbar, außerdem ist b durch 10 teilbar. Da 3 und 10 teilerfremd sind, ist folglich b durch 30 teilbar. Also gibt es natürliche Zahlen p, q, r mit $a = 3p$, $b = 30q$, $c = 4r$ (1); dabei sind p, q, r ebenso wie a, b, c von 0 verschieden.

Aus (1) und der Angabe über die Gesamtzahl der Schüler folgt $3p + 30q + 4r = 85$ (2);

aus (1) und der Angabe über die Anzahl derjenigen Schüler, die Bücher aus der "Mathematischen Schülerbücherei" entliehen hatten, folgt $p + 10q + r = 26$ (3).

Wegen (2) kann nur $q = 1$ oder $q = 2$ sein. Wäre $q = 2$, dann folgte aus (3): $p + r = 6$ und aus (2) weiterhin $3p + 4r = 3p + 3r + r = 3(p + r) + r = 25$. Wegen $p + r = 6$ gilt $1 \leq p \leq 5$ und $1 \leq r \leq 5$. Aus $3(p + r) + r = 3 \cdot 6 + r = 25$ folgte aber $r = 7$, im Widerspruch zu $r \leq 5$.

Also ist $q = 1$ und mithin $p + r = 16$ sowie $3p + 4r = 3(p + r) + r = 55$. Daraus folgt $3 \cdot 16 + r = 55$ und schließlich $r = 7$ sowie $p = 9$. Damit ist gezeigt, daß aus den Angaben der Aufgabe eindeutig hervorgeht:

Die Anzahlen der Schüler der Klassenstufen 6, 7 bzw. 8 betragen 27, 30 bzw. 28.

Korrekturhinweis: Da die Existenz der gesuchten Anzahlen aus dem Aufgabentext entnommen werden kann, ist eine Probe nicht erforderlich. Die Lösung kann auch dadurch gefunden werden, daß man wie oben $p + r$ aus $q = 1$ bzw. $q = 2$ ermittelt und dann anhand einer Tabelle für alle möglichen Zahlenpaare $(p;\ r)$ nachweist, daß nur $p = 9$ und $r = 7$ sein kann.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission