20. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1980/1981

Aufgaben und Lösungen

20. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200611:

a		l
	p	
h		a

Petra, eine eifrige Leserin der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, stellt in einer Arbeitsgemeinschaft ihren Mitschülern folgende Aufgabe:

In der abgebildeten Figur sind für a, h, l, p natürliche Zahlen so einzutragen, daß sich in jeder der beiden Diagonalen D_1, D_2 die Summe 80 ergibt. Dabei soll die Zahl a doppelt so groß wie die Zahl p sein; für l soll eine Primzahl eingetragen werden und für h eine Primzahl, die größer als das Zehnfache von l ist.

Ermittle alle Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Gib an, wie du sie gefunden hast!

Aufgabe 200612:

Aus dem Wirtschaftsbuch eines Erholungsheimes war ersichtlich, daß man für 25 Urlauber, die 14 Tage lang versorgt wurden, insgesamt 21 kg Butter verbraucht hatte.

Berechne, wieviel kg Butter für 30 Personen, die 6 Tage lang versorgt werden sollen, insgesamt bereitgestellt werden müssen, wenn je Person und Tag eine gleichgroße Buttermenge wie im angegebenen Beispiel verbraucht werden soll!

Aufgabe 200613:

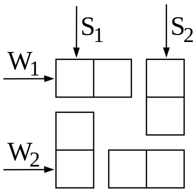
Ermittle aus der Menge aller natürlichen Zahlen von 20 bis 39 alle diejenigen, die durch das Produkt ihrer beiden Ziffern teilbar sind!

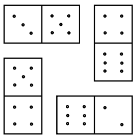
Aufgabe 200614:

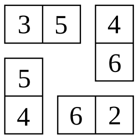
Klaus spielt mit Dominosteinen. Er legt jeweils vier Dominosteine so zusammen, wie es das Bild a) zeigt. Dabei entstehen zwei waagerechte Streifen W_1, W_2 und zwei senkrechte Streifen S_1, S_2. Jeder dieser vier Streifen enthält drei Zahlenfelder. Diese sollen für jeden der vier Streifen dieselbe Summe ergeben; in Bild b) z.B. ist diese Summe 12. Die sonst übliche Regel, daß benachbarte Steine nur mit gleichlautenden Zahlenfeldern aneinanderstoßen dürfen, braucht nicht befolgt zu werden. Anstelle der üblichen Punktsymbole seien die Dominosteine einfacher mit Zahlenzeichen wiedergegeben; siehe Bild c).

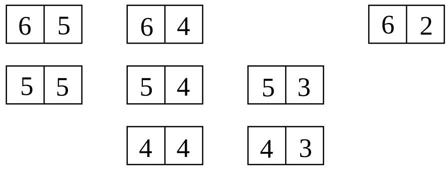
Nachdem Klaus mehrmals Steine in der genannten Weise zusammengelegt hat, verbleiben ihm noch die acht in Bild d) abgebildeten Steine. Er will vier von diesen Steinen in der beschriebenen Art zusammenlegen, wobei in jedem der vier Streifen W_1, W_2, S_1, S_2 die Summe 13 entsteht.

Gib mindestens fünf Möglichkeiten hierfür an! Dabei sollen keine zwei der anzugebenden Möglichkeiten dieselben vier Steine enthalten. Eine Begründung für die anzugebenden Möglichkeiten wird nicht verlangt.

a) 

b) 

c) 

d) 

20. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 200611:

Wenn eine Eintragung von natürlichen Zahlen für a, h, l, p die Bedingungen erfüllt, so folgt: Es gilt $a = 2p$. In der Diagonalen D_1 steht daher die Summe $2p + p + 2p = 5p$.

Laut Aufgabe ist $5p = 80$, also $p = 16$ und $a = 32$.

Ferner folgt $l + 16 + h = 80$, also $l + h = 64$.

Wäre die Primzahl l größer oder gleich 7, so wäre h größer als das Zehnfache hiervon, d.h. $h > 70$ und daher $l + h > 77$, im Widerspruch zu $l + h = 64$. Daher kann l nur eine der Primzahlen 2, 3, 5 sein.

Für $l = 2$ ergäbe sich $h = 62$, also keine Primzahl. Demnach verbleiben nur die Möglichkeiten, daß entweder $l = 3$, $h = 61$ oder $l = 5$, $h = 59$ ist. Daher können nur die Eintragungen

32		3
	16	
61		32

32		5
	16	
59		32

alle geforderten Bedingungen erfüllen.

Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt: $32 + 16 + 32 = 80$, $3 + 16 + 61 = 80$, $5 + 16 + 59 = 80$, 32 ist doppelt so groß wie 16, die Zahlen 3, 61, 5, 59 sind Primzahlen, 61 ist größer als das Zehnfache von 3, ebenso ist 59 größer als das Zehnfache von 5. Also erfüllen genau die beiden angegebenen Eintragungen die geforderten Bedingungen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200612:

Für 14 Tage verbrauchten 25 Urlauber 21 000 g Butter.

Für 1 Tag verbrauchten 25 Urlauber wegen $21\,000 : 14 = 1\,500$ also 1 500 g Butter.

Für 1 Tag verbraucht 1 Urlauber wegen $1\,500 : 25 = 60$ also 60 g Butter.

Für 1 Tag verbrauchen 30 Urlauber wegen $60 \cdot 30 = 1\,800$ also 1 800 g Butter.

Für 6 Tage verbrauchen 30 Urlauber wegen $1\,800 \cdot 6 = 10\,800$ also $10\,800\text{ g} = 10,8\text{ kg}$ Butter.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200613:

Wie die folgende Tabelle zeigt, haben genau die Zahlen 24 und 36 die verlangte Eigenschaft.

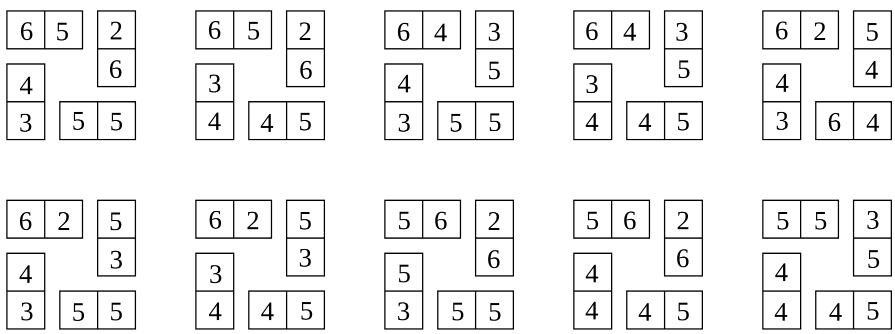
Zahl	Produkt der Ziffern	teilbar?
20	0	nein
21	2	nein
22	4	nein
23	6	nein
24	8	ja
25	10	nein
26	12	nein
27	14	nein
28	16	nein
29	18	nein
30	0	nein
31	3	nein
32	6	nein
33	9	nein
34	12	nein
35	15	nein
36	18	ja
37	21	nein
38	24	nein
39	27	nein

Andere Lösungsvarianten: Durch zusätzliche Überlegungen kann man rechnerische Einzelausführungen einsparen; z.B. kann man unter den Zahlen 21 bis 29 alle ungeraden schon durch die Überlegung ausscheiden, daß sie nicht durch die geraden Produkte $2 \cdot 1$, ..., $2 \cdot 9$ teilbar sind; ebenso scheiden unter den Zahlen 31 bis 38 alle nicht durch 3 teilbaren aus.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200614:

Es genügt, fünf der Möglichkeiten aus der Abbildung anzugeben (oder jeweils statt einer dieser Möglichkeiten eine, die sich aus ihr durch Drehung oder Spiegelung gewinnen läßt).



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission