20. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Saison 1980/1981

Aufgaben und Lösungen

20. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200521:

Zwei Geschwister erhielten im September zusammen 6 Mark für abgelieferte Altstoffe. Im Oktober erhielten sie zusammen 13 Mark. Im November bekamen sie 2 Mark weniger als in den beiden vorigen Monaten zusammen.

Ein Drittel ihres in den drei Monaten erzielten Gesamterlöses spendeten sie für die Solidarität, ein weiteres Drittel des Gesamterlöses legten sie in ihre gemeinsame Ferienkasse. Den Rest teilten sie sich zu gleichen Teilen zum persönlichen Gebrauch.

Ermittle den Betrag, den damit jeder der beiden für sich persönlich erhielt!

Aufgabe 200522:

Bei einem Einkauf wurde der Preis von 170 Mark mit genau 12 Geldscheinen bezahlt. Jeder dieser Geldscheine war ein 10-Mark Schein oder ein 20-Mark-Schein.

Ermittle die Anzahl der 10-Mark-Scheine und die der 20-Mark-Scheine, die zum Bezahlen der angegebenen Summe verwendet wurden!

Aufgabe 200523:

Fritz will auf einer Geraden vier Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge angeordnet zeichnen. Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(1) Die Länge der Strecke AD soll 15 cm betragen.

(2) Die Strecke BC soll um 3 cm länger sein als die Strecke AB.

(3) Die Strecke CD soll doppelt so lang sein wie die Strecke AC.

Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind! Wenn dies der Fall ist, so ermittle alle diejenigen Längenangaben für die Strecken AB, BC und CD, durch die diese Bedingungen erfüllt werden!

Aufgabe 200524:

Ein Mathematiklehrer, ein Physiklehrer und ein Deutschlehrer treffen sich auf einer Tagung. Sie heißen Meyer, Peters und Siewert. (Die Reihenfolge der Familiennamen braucht nicht mit der Reihenfolge der Berufe übereinzustimmen.)

Im Gespräch stellen sie fest, daß einer von ihnen mit Vornamen Otmar, ein anderer Kurt und der dritte Karl heißt und daß einer in Leipzig, einer in Suhl und einer in Schwerin wohnt. Ferner wissen wir:

(1) Herr Meyer erzählt dem Physiklehrer, daß er den Mathematiklehrer in Leipzig besucht habe.

(2) Darauf erwidert ihm Herr Peters: "Das weiß ich schon, Kurt."

(3) Karl hatte ihm nämlich berichtet, daß er Besuch aus Suhl gehabt habe.

In diesem Gespräch ist nur von diesen drei Personen die Rede. Ordne jedem Familiennamen den zugehörigen Vornamen, Wohnort und Beruf zu!

20. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 200521:

Wegen $6 + 13 = 19$ und $19 - 2 = 17$ erhielten die Geschwister im November zusammen 17 Mark, wegen $6 + 13 + 17 = 36$ mithin insgesamt 36 Mark.

Wegen $36 : 3 = 12$ betrug ihre Solidaritätsspende 12 Mark. Den gleichen Betrag legten sie in ihre Ferienkasse. Wegen $36 - 12 - 12 = 12$ verblieben 12 Mark, davon erhielt jeder für sich die Hälfte, also jeder 6 Mark.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200522:

Die folgende Tabelle enthält alle Zusammenstellungen von 2 Geldscheinen, von denen jeder ein 10-Mark-Schein oder ein 20-Mark-Schein ist. Anschließend wird für jede dieser Zusammenstellungen der Gesamtwert ermittelt:

Anzahl der Scheine zu je		Wert der Scheine zu		
10 M	20 M	10 M	20 M	Gesamtwert
0	12	0 M	240 M	240 M
1	11	10 M	220 M	230 M
2	10	20 M	200 M	220 M
3	9	30 M	180 M	210 M
4	8	40 M	160 M	200 M
5	7	50 M	140 M	190 M
6	6	60 M	120 M	180 M
7	5	70 M	100 M	170 M
8	4	80 M	80 M	160 M
9	3	90 M	60 M	150 M
10	2	100 M	40 M	140 M
11	1	110 M	20 M	130 M
12	0	120 M	0 M	120 M

Daraus ist ersichtlich, daß genau für die Anzahlen 7 und 5 der 10-Mark-Scheine bzw. 20-Mark-Scheine der Gesamtwert 170 Mark entsteht.

Zweiter Lösungsweg: War x die Anzahl der 20-Mark-Scheine, so war $12-x$ die Anzahl der 10-Mark-Scheine.

Der in Mark ausgedrückte Wert der 20-Mark-Scheine betrug dann $20x$, der der 10-Mark-Scheine $120 - 10x$.

Daher gilt

$$\begin{aligned} 20x + 120 - 10x &= 170, \\ 10x + 120 &= 170, \\ 10x &= 50, \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Also war 5 die Anzahl der 20-Mark-Scheine, und wegen $12 - 5 = 7$ war 7 die Anzahl der 10-Mark-Scheine.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200523:

(I) Wenn die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind und dabei $\overline{AB} = x$ cm gilt, dann folgt aus (2) $\overline{BC} = (x + 3)$ cm, also

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = x \text{ cm} + (x + 3) \text{ cm} = (2x + 3) \text{ cm}.$$

Wegen (3) gilt dann

$$\overline{CD} = 2\,\overline{AC} = 2\,(2x + 3) \text{ cm} = (4x + 6) \text{ cm}$$

und damit

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} + (2x + 3) \text{ cm} + (4x + 6) \text{ cm} = (6x + 9) \text{ cm}.$$

Wegen (1) folgt nun

$$\begin{aligned} 6x + 9 &= 15, && \text{also} \\ 6x &= 6 && \text{und mithin} \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Daher können die gestellten Bedingungen nur dann erfüllt werden, wenn $\overline{AB} = 1$ cm und folglich (wegen (2) und (3)) $\overline{BC} = 4$ cm und $\overline{CD} = 10$ cm gilt.

(II) Daß durch diese Längenangaben die gestellten Bedingungen tatsächlich erfüllt werden, zeigt folgende Probe:

Wegen $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 1 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 15$ cm ist Bedingung (1) erfüllt.

Die Strecke BC ist um 3 cm länger als die Strecke AB, also ist auch Bedingung (2) erfüllt.

Wegen $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 5$ cm ist die Strecke CD doppelt so lang wie die Strecke AC, und somit ist auch Bedingung (3) erfüllt.

Hinweis zur Korrektur: Es wird nicht verlangt, daß die Schüler die Probe so ausführlich darstellen, wie dies in (II) geschehen ist, d.h., daß sie die Rechnungen explizit hinschreiben. Die für (II) vorgesehenen Punkte dürfen jedoch nur gegeben werden, wenn erkennbar nachgeprüft wurde, daß die ermittelten Längenangaben die Bedingungen erfüllen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200524:

Wegen (1) ist Herr Meyer weder der Physiklehrer noch der Mathematiklehrer, also muß er der Deutschlehrer sein.

Wegen (2) heißt er Kurt mit Vornamen, und wegen (3) wohnt er in Suhl.

Wegen (1) und (2) ist Herr Peters der Physiklehrer und hat nicht den Vornamen Kurt.

Wegen (3) heißt er auch nicht Karl; also heißt er Otmar mit Vornamen. In Suhl kann er nicht wohnen, denn dies trifft ja für Herrn Meyer zu. In Leipzig kann er auch nicht wohnen, denn dies trifft wegen (1) für den Mathematiklehrer zu. Also wohnt er in Schwerin.

Folglich verbleibt für Herrn Siewert nur die Möglichkeit, daß er der Mathematiklehrer ist, in Leipzig wohnt und mit Vornamen Karl heißt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission