19. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Saison 1979/1980

Aufgaben und Lösungen

19. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190621:

Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden. Die Größen dreier der dabei entstehenden vier Schnittwinkel haben die Summe 226°.

Ermittle die Größe jedes einzelnen dieser vier Schnittwinkel!

Aufgabe 190622:

In einem Regal einer HO-Verkaufsstelle liegen sechs Geschenkartikel zum Preis von

15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M,

von jeder Sorte genau ein Stück.

Ein Käufer kaufte genau zwei dieser Geschenke, ein anderer genau drei. Der zweite Käufer hatte doppelt soviel zu bezahlen wie der erste.

Ermittle aus diesen Angaben, welche der sechs Geschenke vom ersten und welche vom zweiten Käufer gekauft wurden!

Aufgabe 190623:

Zum Montieren eines Gerätes sind insgesamt 110 Stunden geplant. Die Montage wird in drei Abschnitten erfolgen. Für den zweiten Abschnitt ist genau dreimal soviel Zeit vorgesehen wie für den ersten; der dritte Abschnitt soll genau halb so lange dauern wie der zweite.

Untersuche, welche Zeiten man hiernach für jeden einzelnen Abschnitt zu planen hat! Überprüfe, ob diese Zeiten alle gestellten Forderungen erfüllen!

Aufgabe 190624:

Ein automatischer Nummernstempel für ein Serienprodukt druckt in jeder Sekunde genau eine natürliche Zahl. Er beginnt mit der Zahl 0 und setzt dann das Drucken der Reihe nach mit den aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3, ... fort.

Ermittle die Anzahl aller Ziffern 1, die der Stempel in der ersten Viertelstunde insgesamt zu drucken hat!

19. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 190621:

Die Größen aller vier Schnittwinkel haben die Summe 360°. Hiernach und wegen $360 - 226 = 134$ hat einer der Schnittwinkel die Größe 134°. Von den übrigen ist einer der Scheitelwinkel dieses Winkels, hat also ebenfalls die Größe 134°. Die anderen beiden sind jeweils Nebenwinkel des zuerst genannten Winkels. Wegen $180 - 134 = 46$ hat daher jeder von ihnen die Größe 46°.

Die gesuchten Größen sind mithin: 131°, 46°, 131° und 46°.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190622:

Der Gesamtpreis aller sechs Geschenke beträgt 119 M. Da genau fünf Geschenke gekauft wurden, blieb genau eines zurück. War es das zu

15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M,

so hatten beide Käufer zusammen

101 M, 103 M, 101 M, 100 M, 99 M bzw. 88 M

gezahlt.

Zahlte der erste Käufer x Mark, so bezahlte der zweite $2x$ Mark. Die von beiden gezahlte Summe, $3x$ Mark, muß folglich durch 3 teilbar sein. Das trifft nur für den Betrag von 99 M zu. Also wurde das Geschenk zu 20 M nicht gekauft; ferner ist $3x = 99$, der erste Käufer bezahlte 33 M.

Hätte er als eines seiner beiden Geschenke das zu 16 M, 19 M oder 31 M gekauft, so müßte das andere 17 M, 14 M bzw. 2 M gekostet haben; diese Preise kamen aber nicht vor. Also hat der erste Käufer die Geschenke zu 15 M und 18 M gekauft, der zweite Käufer folglich die Geschenke zu 16 M, 19 M und 31 M.

Hinweis zur Korrektur: Da die Existenz einer Lösung aus der Formulierung der Aufgabenstellung entnommen werden kann, ist (bei einem Lösungsweg, der durch logische Schlüsse, etwa wie angegeben, zu den gesuchten Zahlen gelangt) eine Probe nicht erforderlich. Werden dagegen die Zahlen lediglich (d.h. ohne solche Herleitung) genannt (und auf das Erfülltsein der Bedingungen überprüft), so ist der Nachweis zu fordern, daß es keine andere Lösung gibt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190623:

Wenn die Forderungen erfüllt sind und dabei der erste Abschnitt x Stunden dauert, so dauert der zweite $3x$ Stunden und der dritte $\frac{3}{2}x$ Stunden. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x + 3x + \frac{3}{2}x &= 110, \\ \frac{2}{2}x + \frac{6}{2}x + \frac{3}{2}x &= 110, \\ \frac{11}{2}x &= 110, \\ \frac{1}{2}x &= 10, \\ x &= 20. \end{aligned}$$

Also können die Forderungen nur dadurch erfüllt werden, daß man für den ersten Abschnitt 20 Stunden und somit für den zweiten 60 Stunden und für den dritten 30 Stunden plant.

Diese Zeiten erfüllen die Forderungen; denn 60 Stunden sind dreimal so viel Zeit wie 20 Stunden, 30 Stunden dauern halb so lange wie 60 Stunden, und wegen $20+60+30 = 110$ ergibt sich die vorgesehene Gesamtzeit.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190624:

Jede Minute hat 60 Sekunden, wegen $15 \cdot 60 = 900$ hat der Stempel also genau 900 Zahlen zu drucken, d.h. die natürlichen Zahlen von 0 bis 899.

Beim Drucken der Zahlen von 0 bis 9 kommt die Ziffer 1 genau 1mal vor.

Setzt man vor jede dieser Zahlen (also an die Zehnerstelle) jede der neun Ziffern 1,...,9, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 10 bis 99, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an der Einerstelle insgesamt genau 9mal vor. Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau zehn mit der Zehnerziffer 1 (nämlich die Zahlen 10,...,19). Somit kommt in den Zahlen von 10 bis 99 die Ziffer 1 an der Zehnerstelle insgesamt genau 10mal vor.

Setzt man vor jede der Zahlen von 0 bis 99 (nachdem die Zahlen von 0 bis 9 durch Vorschalten einer Zehnerziffer 0 zweistellig geschrieben wurden) an die Hunderterstelle jede der acht Ziffern 1,...,8, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 100 bis 899, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an den Einer- und Zehnerstellen insgesamt achtmal so oft vor wie das bisher ermittelte Vorkommen ($1+9+10 = 20$), d.h. genau 160mal. Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau 100 mit der Hunderterziffer 1 (nämlich die Zahlen 100,...,199). Somit kommt in den Zahlen von 100 bis 899 die Ziffer 1 an der Hunderterstelle insgesamt genau 100mal vor.

Damit sind alle zu erfassenden Ziffern 1 berücksichtigt; ihre Anzahl beträgt somit $1+9+10+160+100 = 280$.

Hinweis zur Korrektur: Auch ein stärker "probierendes Abzählen" kann grundsätzlich als mathematisch zulässiges Hilfsmittel dienen. Jedoch ist die zu bearbeitende Zahlenmenge bewußt so groß gewählt worden, daß auch bei solchen Lösungsdarstellungen irgend ein systematisierendes Zusammenfassen erkennbar sein sollte.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission