18. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1978/1979

Aufgaben und Lösungen

18. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180911:

Aus einer quadratischen Papptafel von 8 dm Seitenlänge sollen 9 Würfelnetze, die nicht kongruent zueinander zu sein brauchen, ausgeschnitten werden. Aus jedem dieser Würfelnetze soll ein Würfel von 1 dm^3 Rauminhalt gefaltet werden können.

Zeigen Sie an einem Beispiel, daß es möglich ist, 9 derartige Netze auf einer solchen Tafel einzuzeichnen!

Es genügt eine solche Zeichnung; Beschreibung und Begründung werden nicht verlangt.

Aufgabe 180912:

Es seien a und b rationale Zahlen, für die folgendes gilt:

> Vermindert man a um 10%, so erhält man 297.
> Vergrößert man b um 10%, so erhält man 297.

Wieviel Prozent von a beträgt dann b? (Angabe des Prozentsatzes auf zwei Dezimalstellen gerundet.)

Aufgabe 180913:

In einem Zirkel Junger Mathematiker versuchen die Teilnehmer, folgende Aufgabe zu lösen:

> Die Zahl 30 soll dargestellt werden, indem dazu genau eine einziffrige Zahl genau neunmal benutzt wird, wobei noch die Zeichen der Grundrechenoperationen und Klammern erlaubt sind und die Potenzschreibweise zulässig ist.

Zeigen Sie, daß das für jede der einziffrigen Zahlen 1; 2; 3; 4, 5; 6; 7; 8 und 9 möglich ist! (Es genügt jeweils die Angabe eines Beispiels.)

Aufgabe 180914:

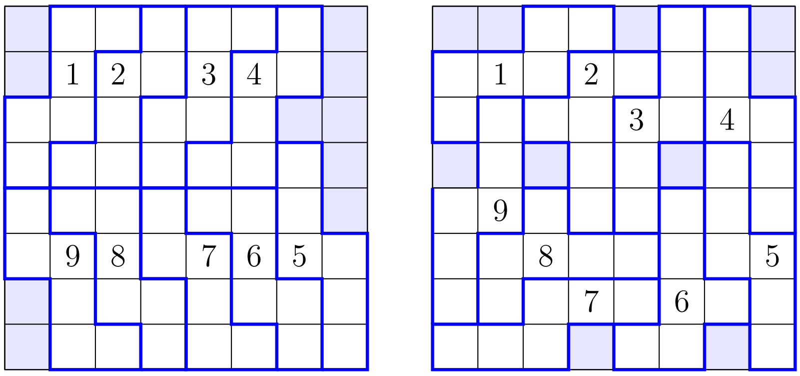
Gegeben seien zwei Punkte A_0 und A_1. Ihr Abstand voneinander werde mit a bezeichnet.

Man konstruiere die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge $3a$ unter alleiniger Benutzung eines Zirkels!

18. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 180911:
Angaben von zwei verschiedenen Möglichkeiten:



Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 180912:
Da 10 % von a gleich $\frac{a}{10}$ ist, gilt: $a - \frac{a}{10} = 297$, also $\frac{9}{10}a = 297$. Entsprechend gilt:

$$b + \frac{b}{10} = 297 \qquad \text{also} \qquad \frac{11}{20}b = 297 = \frac{9}{10}a$$

Daraus folgt $b = \frac{9}{11}a = 0,8182a$ (Dezimalbruch auf 4 Dezimalstellen gerundet); b beträgt also $81,82\%$ von a (Prozentsatz auf 2 Dezimalstellen gerundet).

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 180913:
Es gilt:

$$\begin{aligned}
30 &= (1+1)^{1+1+1+1+1} - 1 - 1 \\
30 &= (2+2+2)^2 - 2 - 2 - 2 + 2 - 2 \\
30 &= 3^3 + 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 \\
30 &= 4 \cdot 4 \left(\frac{4+4}{4}\right) - \frac{4}{4} - \frac{4}{4} \\
30 &= 5 \cdot 5 + 5 + 5 - 5 + 5 - 5 + 5 - 5
\end{aligned}$$

$$30 = 6 \cdot 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6$$
$$30 = 7 + 7 + 7 + 7 + \frac{7+7}{7} + 7 - 7$$
$$30 = 8 + 8 + 8 + 8 - \frac{8+8}{8} + 8 - 8$$
$$30 = 9 + 9 + 9 + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9}$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

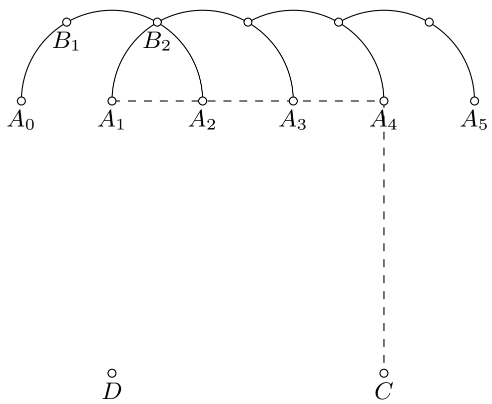
Lösung 180914:

Man schlägt um A_0 und A_1 Kreise mit dem Radius a. Einer ihrer Schnittpunkte sei B_1 genannt. Man schlägt um A_1 und B_1 Kreise mit dem Radius a. Ihr von A_0 verschiedener Schnittpunkt sei B_2 genannt. Man schlägt um A_1 und B_2 Kreise mit dem Radius a. Ihr von B_1 verschiedener Schnittpunkt sei A_2 genannt.

Da die Dreiecke $A_0A_1B_1$, $B_1A_1B_2$ gleichseitig sind, haben die Winkel $\angle A_0A_1B_1$, $\angle B_1A_1B_2$ und $\angle B_2A_1A_2$ jeweils eine Größe von 60° und bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

Damit liegen die Punkte A_0, A_1 und A_2 auf derselben Geraden, und es ist $A_0A_1 = A_1A_2 = a$.

Durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens lässt sich eine beliebig große Menge von Punkten A_n konstruieren, die alle auf derselben Geraden liegen und von denen je zwei benachbarte den Abstand a haben.



Man konstruiert auf diese Weise eine Folge von Punkten $A_0, A_1, ..., A_5$. Dann ist $A_0A_5 = 5a$, $A_1A_4 = 3a$ und $A_0A_4 = 4a$.

Man schlägt nun den Kreis um A_4 mit dem Radius $3a$ und um A_0 den Kreis mit dem Radius $5a$. Beide Kreise schneiden einander, einer der beiden Schnittpunkte sei C.

Wegen $(3a)^2 + (4a)^2 = (5a)^2$ ist nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras das durch die Punkte A_0, A_4, C bestimmte Dreieck rechtwinklig, und A_4 ist der Scheitelpunkt des rechten Winkels.

Man schlägt nun den Kreis um C mit dem Radius $3a$ und um A_1 den Kreis mit dem gleichen Radius. Ihr von A_4 verschiedener Schnittpunkt sei D genannt. Wegen $A_1A_4 = A_4C = CD = DA_1 = 3a$ und der Tatsache, dass der Innenwinkel bei A_4 ein rechter ist, sind A_1, A_4, C und D Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge $3a$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission