18. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1978/1979

Aufgaben und Lösungen

18. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180721:

An einer Schule unterrichteten die drei Lehrer Schulze, Ufer und Krause in den Fächern Deutsch, Russisch, Geschichte, Mathematik, Physik und Biologie. Es sei folgendes bekannt:

(1) Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet in genau zwei dieser sechs Fächer, und jedes dieser sechs Fächer wird von genau einem dieser drei Lehrer unterrichtet.

(2) Sowohl der Lehrer für Biologie als auch der Lehrer für Physik sind älter als Herr Schulze.

(3) In ihrer Freizeit spielen der Lehrer für Russisch, der Lehrer für Mathematik und Herr Schulze gern Skat. Dabei gewinnt Herr Krause öfter als der Lehrer für Biologie und der Lehrer für Russisch.

Weise nach, daß man aus diesen Angaben die Verteilung der drei Lehrer auf die Fächer eindeutig ermitteln kann, und gib diese Verteilung an!

Aufgabe 180722:

Von einem Bruch wird gefordert, daß er die beiden folgenden Eigenschaften (1), (2) hat. Ermittle alle Brüche, die diese Forderung erfüllen!

(1) Der Bruch stellt die gleiche gebrochene Zahl dar wie 0,4.

(2) Die Summe aus dem Zähler und dem Nenner dieses Bruches ist eine zweistellige Quadratzahl.

Aufgabe 180723:

In einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ so gelegen, daß die Eckpunkte A, B, C, D auf der Peripherie des Kreises k liegen und AB Durchmesser von k ist. Außerdem sei $\overline{\sphericalangle MAC} = 36°$.

Beweise, daß dann $\overline{\sphericalangle CMD} = 36°$ ist!

Aufgabe 180724:

Über sechs Punkte A, B, C, D, E, F wird folgendes vorausgesetzt:

ΔABC ist ein rechtwinkliges Dreieck mit B als Scheitel des rechten Winkels. D ist ein (innerer) Punkt der Strecke AB; E ist ein (innerer) Punkt der Strecke BC, F ist ein (innerer) Punkt der Strecke DB. Die Dreiecke ADC, DEC, DFE, und FBE sind sämtlich einander flächeninhaltsgleich. Ferner gilt $\overline{FB} = 15$ cm und $\overline{BE} = 20$ cm.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke AD!

18. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 180721:

Wir bezeichnen die Namen der Lehrer abkürzend mit S, U bzw. K, die der Fächer mit d, r, g, m, p bzw. b. Dabei bedeute $S = d$, daß Schulze das Fach Deutsch unterrichtet; $S \neq b$ bedeute, daß Schulze nicht im Fach Biologie unterrichtet; u.s.w.

Aus (1) und (2) folgt $S \neq b$ und $S \neq p$; aus dem ersten Teil von (3) folgt analog $S \neq r$ und $S \neq m$. Wegen (1) muß daher $S = d$ und $S = g$ gelten.

Ebenfalls wegen (1) gilt $K \neq d$ und $K \neq g$, und da aus dem zweiten Teil von (3) die Beziehungen $K \neq b$ und $K \neq r$ folgen, gilt wegen (1) mithin $K = m$ und $K = p$.

Ebenfalls wegen (1) folgt schließlich $U = r$ und $U = b$. Damit ist gezeigt, daß auf Grund der Angaben nur folgende Verteilung möglich ist:

Herr Schulze unterrichtet Deutsch und Geschichte,

Herr Ufer unterrichtet Russisch und Biologie,

Herr Krause unterrichtet Mathematik und Physik.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180722:

Angenommen, es gibt einen solchen Bruch $\frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p, q und $q \neq 0$. Wegen (1) gilt dann $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$. Daraus folgt $p = 2n$ und $q = 5n$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$), also $p + q = 7n$, was mit $7|p + q$ gleichbedeutend ist.

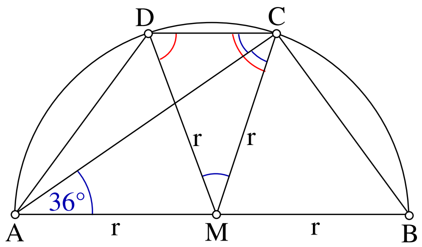
Da die Zahl 49 die einzige durch 7 teilbare zweistellige Quadratzahl ist, kann wegen (2) nur $p + q = 49$ und somit $n = 7$, $p = 14$, $q = 35$ gelten.

Wenn es also einen Bruch mit den geforderten Eigenschaften gibt, dann kann dies nur der Bruch $\frac{14}{35}$ sein.

Tatsächlich erfüllt $\frac{14}{35}$ beide Bedingungen; denn es gilt $\frac{14}{35} = 0,4$ und $14 + 35 = 49 = 7^2$. Also hat genau der Bruch $\frac{14}{35}$ die geforderten Eigenschaften.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180723:



Nach Voraussetzung ist das Dreieck AMC gleichschenklig mit $\overline{AM} = \overline{MC} = r$, also gilt

$$\overline{\sphericalangle MAC} = \overline{\sphericalangle ACM} = 36°. \tag{1}$$

Da $\sphericalangle DCA$ und $\sphericalangle MAC$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt

$$\overline{\sphericalangle DCA} = \overline{\sphericalangle MAC} = 36°. \tag{2}$$

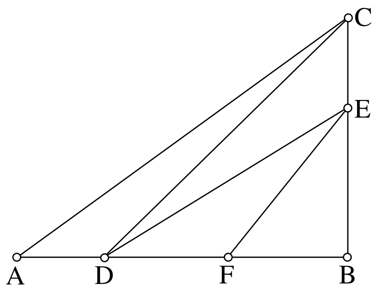
Aus (1) und (2) folgt

$$\overline{\sphericalangle DCA} + \overline{\sphericalangle ACM} = \overline{\sphericalangle DCM} = 72°. \tag{3}$$

Weiterhin ist nach Voraussetzung das Dreieck MCD gleichschenklig mit $\overline{MD} = \overline{MC} = r$; hiernach und wegen (3) gilt $\overline{\sphericalangle MDC} = \overline{\sphericalangle DCM} = 72°$. Daraus folgt $\overline{\sphericalangle CMD} = 36°$. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180724:



Für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks FBE gilt laut Voraussetzung und nach der Inhaltsformel für Dreiecke

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBE beträgt laut Voraussetzung $2 \cdot A_1$, so daß für $\overline{BD}$ folgt:

$$\frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{BE} = 300 \text{ cm}^2, \quad \text{d.h.} \quad \overline{BD} = 30 \text{ cm}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBC beträgt laut Voraussetzung

$$\frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{BD} = 450 \text{ cm}^2, \quad \text{d.h.} \quad \overline{BC} = 30 \text{ cm}.$$

Analog folgt für $\overline{AB}$:

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 600 \text{ cm}^2, \quad \text{d.h.} \quad \overline{AB} = 40 \text{ cm}.$$

und somit $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD} = 40 \text{ cm} - 30 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$. Die Länge der Strecke AD beträgt 10 cm.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission