17. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1977/1978

Aufgaben und Lösungen

17. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170911:

Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn sich zwei natürliche Zahlen (≥ 1) um 1 977 unterscheiden, dann besitzt die (positive) Differenz ihrer Quadrate mindestens acht verschiedene netürliche Zahlen als Teiler.

Aufgabe 170912:

Ein Fahrzeug, dessen Querschnitt vereinfacht als ein Rechteck angenommen werden soll, soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren, dessen Höhe 3 m beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Höhe des Fahrzeuges, wenn es eine Breite von 3 m hat und wenn bei der Durchfahrt überall ein Spielraum von mindestens einem halben Meter zwischen der Tunnelwand und dem Fahrzeug vorhanden sein soll, d.h. wenn jeder Punkt des Fahrzeuges einen Abstand von mindestens einem halben Meter zur Tunnelwand haben soll!

Hinweis: Unter dem Abstand eines Punktes P im Innern des Tunnels zur Tunnelwand versteht man die Länge der Strecke PQ, wobei Q folgendermaßen definiert ist: Man lege durch P einen Querschnitt des Tunnels, wobei dieser als ein Halbkreis k mit den Endpunkten A und B erscheint. Ist M der Mittelpunkt von AB, so sei Q der Schnittpunkt von k mit der Geraden durch M und P.

Aufgabe 170913:

Herr A kaufte in einer Buchhandlung einige gleiche Bücher. Er hätte für jedes dieser Bücher einen ganzzahligen Betrag in Mark zu zahlen gehabt, der genau so groß war wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher. Wegen seines Sammeleinkaufs erhielt er jedoch für jedes Buch eine Mark Preisnachlaß.

Als er zahlen wollte, stellte er fest, daß er nur 10-Mark-Scheine bei sich hatte; zwar so viele, daß das zum Bezahlen gereicht hätte, doch betrug der Gesamtpreis kein ganzzahliges Vielfaches von 10 Mark. Der Verkäufer konnte ihm auch nicht herausgeben.

Herr B, ein Bekannter von Herrn A, hielt sich zur gleichen Zeit in der Buchhandlung auf. Auch er hatte einige (andere) gleiche Bücher gekauft, und auch bei ihm betrug der Preis jedes einzelnen Buches genau so viel Mark, wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher ausmachte. Er erhielt keinen Preisnachlaß.

Da seine Rechnung zusammen mit der von Herrn A einen Betrag ergab, der ausnahmslos mit 10-Mark-Scheinen beglichen werden konnte, bezahlte Herr A denjenigen Teilbetrag für Herrn B mit, der diesem noch fehlte, nachdem er einen möglichst großen Anteil seiner Rechnung mit 10-Mark-Scheinen beglichen hatte.

Wieviel Mark hatte Herr A für Herrn B damit ausgelegt?

Aufgabe 170914:

Ein Rechenautomat sei in der Lage, nach bestimmten Regeln "Zeichenreihen" umzuformen. Eine "Zeichenreihe" sei eine Aneinanderreihung der Zeichen A, B, S, a, b in beliebiger Reihenfolge und mit beliebiger

Häufigkeit. Es seien folgende Regeln zur Umformung zugelassen:

(1) S wird ersetzt durch A.

(2) A wird ersetzt durch aAB.

(3) A wird ersetzt durch a.

(4) B wird ersetzt durch b.

Der Automat wendet bei jedem Umformungsschritt genau eine dieser Regeln auf genau ein Zeichen der Zeichenreihe an. Ist es möglich, daß auf eine vorliegende Zeichenreihe mehrere Regeln angewendet werden könnten, so entscheidet der Automat zufällig darüber, welche der Regeln angewendet wird. Ist keine der angegebenen Regeln auf eine Zeichenreihe anwendbar, so bleibt der Automat stehen und gibt die letzte Zeichenreihe aus.

Wir geben dem Automaten das Zeichen S ein.

a) Ist es möglich, daß der Automat 10 Umformungsschritte ausführt, ohne danach stehenzubleiben? Wenn das möglich ist, dann geben Sie für einen solchen Fall an, welche der Regeln bei diesen 10 Umformungsschritten angewendet wurden und wie oft dies für jede dieser Regeln der Fall war!

b) Wie viele Umformungsschritte wurden von dem Automaten insgesamt durchgeführt, falls er eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt?

c) Geben Sie alle Zeichenreihen aus 5 Zeichen an, die vom Automaten ausgegeben werden könnten!

17. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 170911:

Die beiden Zahlen seien a und b, und es gelte o.B.d.A. $b < a$. Dann gilt für die positive Differenz d ihrer Quadrate

$$d = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a+b) \cdot 1977 = (a+b) \cdot 3 \cdot 659$$

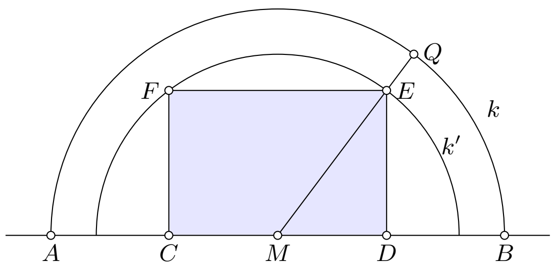
Daher hat d mindestens die natürlichen Zahlen

$$1; 3; 659; 1977; a+b; (a+b) \cdot 3; (a+b) \cdot 659; d$$

als Teiler. Wegen $a + b > a - b$ (was aus $b > 0$ folgt), d.h. $a + b > 1977$, sind diese acht Teiler sämtlich voneinander verschieden.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 170912:



Es sei k ein halbkreisförmiger Querschnitt des Tunnels, das Halbkreisbogen k habe die Endpunkte A und B. Ferner sei M der Mittelpunkt von AB.

Ein Punkt P im Innern des Querschnitts erfüllt genau dann die Forderung, mindestens einen halben Meter Abstand zur Tunnelwand zu besitzen, wenn $MP \leq 2,5$ m gilt, d.h. genau dann, wenn P der Fläche des Halbkreises k' angehört, der den Mittelpunkt M, den Radius 2,5 m hat und in der Fläche des Halbkreises k liegt.

Angenommen nun, alle Punkte eines rechteckigen Fahrzeugquerschnitts $CDEF$ erfüllen diese Forderung, wobei C und D auf der Strecke AB liegen.

Dann gilt $ME \leq 2,5$ m und $MF \leq 2,5$ m. Ferner gilt $MC \geq 1,5$ m oder $MD \geq 1,5$ m; denn wäre $MC < 1,5$, und $MD < 1,5$ m, so ergäbe sich $CD < 3$ m. Es sei o.B.d.A. $MD \geq 1,5$ m. Dann folgt

$$DE = \sqrt{ME^2 - MD^2} \leq \sqrt{2,5^2 - 1,4^2} m = 2m$$

Daher kann ein Fahrzeug nur dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn es nicht höher als 2 m ist.

Umgekehrt lassen sich die Bedingungen der Aufgabe mit einem Fahrzeug (der Breite 3 m und) der Höhe 2 m erfüllen. Wählt man nämlich im Tunnelquerschnitt ein Rechteck $CDEF$ mit C und D auf AB und mit $CD = 3$ m, $DE = DF = 2$ m so, dass $MC = MD = 1,5$ m ist, so liegen E und F wegen $ME = MF = \sqrt{1,5^2 + 2^2}m = 2,5m$ auf k', also gehört das gesamt Rechteck $CDEF$ der Fläche des Halbkreises k' an.

Die gesuchte größtmögliche Fahrzeughöhe beträgt somit 2 m.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 170913:

Angenommen, Herr A habe a Bücher gekauft. Dann betrugt der ursprüngliche Preis eines Buches a Mark, nach dem Preisnachlass $(a-1)$ Mark. Herr A hatte demnach $a(a-1)$ Mark zu zahlen.

Nun enden die Produkte zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets auf eine der Ziffern 0, 2, oder 6, wie sich aus folgender Tabelle ergibt:

Endziffer $a-1$	Endziffer a	Endziffer $a(a-1)$
0	1	0
1	2	2
2	3	6
3	4	2
4	5	0
5	6	0
6	7	2
7	8	6
8	9	2
9	0	0

Da der Betrag mit 10-Mark-Scheinen allein nicht beglichen werden konnte, entstand ein Restbetrag von 2 oder 6 Mark.

Herr B hatte, wenn er b Bücher kaufte, insgesamt b^2 Mark zu zahlen. Da der von ihm zu zahlende Betrag zusammen mit dem von Herrn A ein Vielfaches von 10 M ergab, musste dieser Betrag mit der Ziffer 8 oder 4 enden.

Es gibt jedoch keine Quadratzahl mit der Endziffer 8, dagegen gibt es Quadratzahlen mit der Endziffer 4. Demnach hatte Herr B einen Betrag zu zahlen, dessen letzte Ziffer 4 war. Herr A hatte also 4 Mark für Herrn B ausgelegt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 170914:

a) Eine solche Möglichkeit besteht z.B. darin, erst (1) und dann nur noch Schritte der Art (2) ausführen zu lassen. Dies ist nämlich stets fortsetzbar, da im Ergebnis von (2) stets wieder ein Zeichen A auftritt. Hierbei wird also (1) einmal und (2) neunmal angewendet.

   Möglichkeiten sind z.B.:

Anzahl der Anwendungen der Regel			
(1)	(2)	(3)	(4)
1	8	0	1
1	8	1	0
1	7	0	2
1	7	1	1
1	6	0	3
1	6	1	2
1	5	0	4
1	5	1	3

b) Bei den Schritten (1), (3), (4) bleibt die Anzahl der Zeichen unverändert, bei (2) vergrößert sie sich um genau 2. Daher kann nur dann die Anzahl 5 entstehen, wenn nach dem zwangsläufigen Anfangsschritt (1), der S durch A ersetzt, unter den dann noch möglichen Schritten (2), (3), (4) genau 2 Schritte der Art (2) vorkommen. Die Anzahl der großen Buchstaben wird bei (2) um genau 1 größer, bei (3) und (4) um je genau 1 kleiner.

Da eine Zeichenreihe genau dann vom Automaten ausgegeben wird, wenn sie keinen großen Buchstaben enthält, folgt daraus:

Wenn der Automat eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt, so ist dies nur möglich nach Umformungsserien, in denen die Anzahl der Schritte (3) oder (4) genau 3 und somit die Anzahl der insgesamt ausgeführten Schritte genau 6 beträgt.

c) Die in b) genannten Umformungen sind nur in folgender Weise möglich: Da die Anzahl der Zeichen A bei Schritten der Art (2) und (4) gleich bleibt und sich bei (3) um 1 verringert, tritt der Schritt (3) genau einmal auf, und zwar erst, nachdem beide Schritte der Art (2) ausgeführt sind.

Da ferner die Anzahl der Zeichen B bei Schritten der Art (2) jeweils um 1 zunimmt, bei (3) gleich bleibt und bei (4) um je 1 abnimmt, können zu jedem Zeitpunkt höchstens so viele Schritte (4) ausgeführt werden, wie bereits Schritte (2) vorangegangen waren. Daher verbleiben genau die folgenden Möglichkeiten, die Schritte anzuordnen:

$$\begin{aligned} \text{I:} &\quad (1),(2),(2),(3),(4),(4)\\ \text{II:} &\quad (1),(2),(2),(4),(3),(4)\\ \text{III:} &\quad (1),(2),(2),(4),(4),(3)\\ \text{IV:} &\quad (1),(2),(4),(2),(3),(4)\\ \text{V:} &\quad (1),(2),(4),(2),(4),(3) \end{aligned}$$

Bei den Möglichkeiten I, II, III entsteht in den ersten drei Schritten die Zeichenreihe $aaABB$, danach wird die Teilreihe ABB durch abb ersetzt.

Bei den Möglichkeiten IV und V entsteht in den ersten vier Schritten die Zeichenreihe $aaABb$, danach wird die Teilreihe AB durch ab ersetzt. Somit gibt es genau eine Zeichenreihe aus 5 Zeichen, die vom Automaten ausgegeben werden kann, nämlich die Reihe $aaabb$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission