17. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1977/1978

Aufgaben und Lösungen

OJM

17. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170731:

Es sei A die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen a, für die $1\,500 \leq a \leq 2\,650$ gilt.

Untersuche, ob es in der Menge A fünfundsechzig verschiedene Zahlen gibt, die gerade und durch 9 teilbar sind!

Aufgabe 170732:

Uli hat vier verschiedene, mit A, B, C und D bezeichnete Sorten Stahlkugeln. Dabei haben Kugeln gleicher Sorte auch stets gleiches Gewicht. Mit Hilfe einer Balkenwaage stellte er fest, daß zwei Kugeln der Sorte B genau so schwer sind wie eine Kugel der Sorte A. Weiter fand er, daß drei Kugeln der Sorte C ebensoviel wiegen wie eine Kugel der Sorte B und daß fünf Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht haben wie eine Kugel der Sorte C.

a) Wieviel Kugeln der Sorte D muß Uli in die (leere) eine Waagschale legen, wenn sie einer Kugel der Sorte A in der anderen Waagschale das Gleichgewicht halten sollen?

b) In der einen Waagschale liegen 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C. Wieviel Kugeln der Sorte B muß Uli in die andere (leere) Waagschale legen, um Gleichgewicht zu erhalten?

Aufgabe 170733:

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = 9,0$ cm, $\overline{BC} = 6,0$ cm und $\sphericalangle BCA = 120°$.

Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck $CDEFGH$ derart, daß D auf AC, F auf AB und H auf BC liegen!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob es genau ein Sechseck $CDEFGH$ gibt, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht!

Aufgabe 170734:

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege der Punkt D so, daß $\overline{BD} = \overline{AB}$ ist

Beweise, daß dann $\sphericalangle DCA = 90°$ ist!

Aufgabe 170735:

Ermittle alle zweistelligen Zahlen, für die sowohl die folgende Aussage (1) als auch die folgende Aussage (2) zutrifft:

(1) Setzt man zwischen Einerziffer und Zehnerziffer der zweistelligen Zahl die Ziffer 5, so erhält man eine Zahl, die um genau 230 größer ist als die ursprüngliche Zahl.

(2) Setzt man die Ziffer 5 vor die zweistellige Zahl, so erhält man ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl.

Aufgabe 170736:

In einem Quadrat $ABCD$ habe die Diagonale AC eine Länge von $10,0\,\text{cm}$.

a) Konstruiere ein solches Quadrat! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

b) Ein Rechteck $EFGH$ heißt dann dem Quadrat $ABCD$ einbeschrieben, wenn bei geeigneter Bezeichnung E auf AB, F auf BC, G auf CD und H auf DA liegt. Dabei gilt $EF \parallel AC$.

Ermittle für jedes derartige Rechteck $EFGH$ seinen Umfang!

17. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 170731:

Alle Zahlen, die durch 2 und durch 9 teilbar sind, sind auch durch $2 \cdot 9 = 18$ teilbar, da 2 und 9 teilerfremd sind. Die kleinste durch 18 teilbare Zahl in der Menge A ist 1 512, die nächstgrößere erhält man durch Addition von 18, da es unter 18 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nur eine durch 18 teilbare gibt. Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen. Die vierundsechzigste dabei erhaltene Zahl (einschließlich der Zahl 1 512 also insgesamt die fünfundsechzigste gewonnene Zahl) lautet $1\,512 + 64 \cdot 18 = 1\,512 + 1\,152 = 2\,664$. Da sie größer als 2 650 ist, gibt es folglich in der Menge A nicht fünfundsechzig verschiedene durch 9 teilbare gerade Zahlen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 170732:

a) Das Gewicht einer Kugel der Sorte A iat gleich dem doppelten Gewicht einer Kugel der Sorte B. Eine Kugel der Sorte B hat das dreifache Gewicht einer Kugel der Sorte C, folglich hat eine Kugel der Sorte A das gleiche Gewicht wie 6 Kugeln der Sorte C. Eine Kugel der Sorte C hat das fünffache Gewicht einer Kugel der Sorte D; das Gewicht von 6 Kugeln der Sorte C ist daher gleich dem Gewicht von 30 Kugeln der Sorte D. Daraus ergibt sich, daß Uli 30 Kugeln der Sorte D in die eine Waagschale legen muß, wenn Gleichgewicht erreicht werden soll.

b) Das Gewicht von 5 Kugeln der Sorte D ist gleich dem Gewicht einer Kugel der Sorte C, daher haben 20 Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht wie 4 Kugeln der Sorte C. Das Gewicht von 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C ist mithin gleich dem Gewicht von 9 Kugeln der Sorte C.

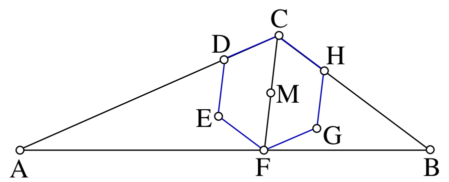
   Da drei Kugeln der Sorte C soviel wiegen wie eine Kugel der Sorte B, wiegen folglich 9 Kugeln der Sorte C soviel wie 3 Kugeln der Sorte B. Uli muß also 3 Kugeln der Sorte B in die andere Waagschale legen, wenn sie 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C das Gleichgewicht halten sollen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 170733:

(I) Angenommen, ein Sechseck $CDEFGH$ erfülle die Bedingungen der Aufgabe.

Dann halbiert der Mittelpunkt M des Umkreises des Sechsecks $CDEFGH$ die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BCA$, und die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sind sämtlich gleichseitig mit der Seitenlänge $\overline{CM}$.



(II) Daher entspricht ein Sechseck $CDEFGH$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BCA$, ihr Schnittpunkt mit AB sei Punkt F.

(2) Man halbiert CF, der Halbierungspunkt sei M.

(3) Man beschreibt um C den Kreis mit dem Radius $\overline{MC}$, seine Schnittpunkte mit AC bzw. BC seien D bzw. H genannt.

(4) Man beschreibt um M und F Kreise mit dem Radius $\overline{MC}$, ihre Schnittpunkte miteinander seien E und G genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Sechseck $CDEFGH$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion liegen die Punkte D, F, H in dieser Reihenfolge auf den Seiten AC, AB, BC. Ebenfalls nach Konstruktion ist $\overline{CD} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{HC} = \overline{CM}$.

Da ferner nach Konstruktion M auf der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle DCH$ der Größe 120° liegt, ΔCDM also gleichseitig ist, und da nach Konstruktion ΔEFM ebenfalls gleichseitig ist, gilt $\sphericalangle CMD = \sphericalangle FME = 60°$.

Hiernach und wegen $\overline{\sphericalangle FMC} = 180°$ ist $\overline{\sphericalangle EMD} = 60°$. Da das Dreieck EMD wegen $\overline{MD} = \overline{ME}$ gleichschenklig ist, gilt $\overline{\sphericalangle MED} = \overline{\sphericalangle MDE}$, diese Winkelgröße beträgt somit jeweils 60°, also ist $\overline{DE} = \overline{CM}$.

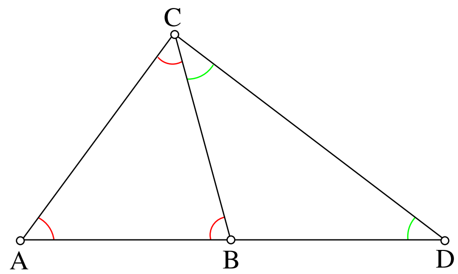
Entsprechend ist $\overline{GH} = \overline{CM}$. Wegen $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HC} = \overline{CM}$ sind die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sämtlich gleichseitig, und die Winkel $\sphericalangle CDE$, $\sphericalangle DEF$, $\sphericalangle EFG$, $\sphericalangle FGH$ und $\sphericalangle GHC$ haben sämtlich die Größe 120°.

(IV) Sämtliche Konatruktionsschritte sind eindeutig ausführbar, deshalb gibt es stets genau ein Sechseck $CDEFGH$, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Bemerkung: Auf den Nachweis, daß $\overline{CM} < \overline{BC}$ und $\overline{CM} < \overline{AC}$ ist, soll hier verzichtet werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 170734:



Nach Voraussetzung gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$ und damit

$$\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle BCA} = \overline{\sphericalangle CAB} = 60°.$$

Der Außenwinkel $\sphericalangle CBD$ des Dreiecks ABC beträgt somit nach dem Außenwinkelsatz 120°.

Wegen $\overline{BC} = \overline{BD}$ ist ΔBDC gleichschenklig mit der Spitze in B. Daher sowie wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck ist

$$\overline{\sphericalangle DCB} = \overline{\sphericalangle BDC} = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°.$$

Daraus folgt, daß

$$\overline{\sphericalangle DCA} = \overline{\sphericalangle BCA} + \overline{\sphericalangle DCB} = 60° + 30° = 90°. \quad \square$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 170735:

Angenommen, eine zweistellige Zahl erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist sie mindestens 10 und höchstens 99: folglich entsteht nach Vergrößerung um 230 eine Zahl, die mindestens 240 und höchstens 329 ist. Von diesen Zahlen haben nur 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258 und 259 eine 5 als Zehnerziffer. Folglich können höchstens die Zahlen 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 die Bedingung (1) erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingung, da durch das in (1) genannte Einfügen der Ziffer 5 die Zehnerziffer 2 durch die Ziffernfolge 25 ersetzt wird, wobei sich die Zahlen jeweils um 230 vergrößern.

Setzt man vor jede von ihnen die Ziffer 5, so erhält man die Zahlen 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528 und 529. Diese sind jeweils um 500 größer als die ursprüngliche Zahl. Daher ist eine so gebildete Zahl genau dann ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl, wenn auch 500 ein ganzzahliges Vielfaches von ihr ist. Das trifft unter den Zahlen, die (1) erfüllen, genau für die Zahlen 20 und 25 zu. Daher sind dies alle zweistelligen Zahlen, die beide Bedingungen erfüllen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 170736:

a) Da in jedem Quadrat die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, einander gleich lang sind und einander halbieren, liegen die Eckpunkte B und D erstens auf der Mittelsenkrechten von AC und zweitens auf dem Kreis mit dem Radius $\frac{\overline{AC}}{2}$ um den Mittelpunkt von AC.

   Daher entspricht ein Quadrat $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

   1. Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge $\overline{AC} = 10,0$ cm und konstruieren ihre Mittelsenkrechte.
   2. Wir beschreiben um den Mittelpunkt M der Strecke AC den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}\overline{AC}$.
   3. Schneidet der Kreis die Mittelsenkrechte in zwei Punkten, so seien diese B bzw. D genannt.

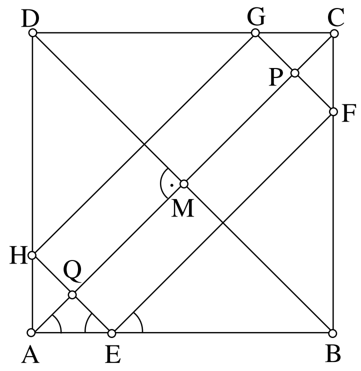
   $ABCD$ ist das gesuchte Quadrat.

   Beweis: Laut Konstruktion gilt $BD \perp AC$. Ferner gilt laut Konstruktion $\overline{AM} = \overline{CM} = \overline{BM} = \overline{DM}$.

   Folglich sind nach dem Kongruenzsatz (sws) die Dreiecke AMB, BMC, CMD und DMA zueinander kongruent. Also gilt: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$. Da die erwähnten Dreiecke ferner rechtwinklig-gleichschenklig mit der Spitze in M sind, sind ihre Basiswinkel je 45° groß. Da schließlich jeder der Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle DAB$ gleich der Summe zweier dieser Basiswinkel ist, hat jeder von ihnen die Größe 90°. Folglich ist $ABCD$ ein Quadrat, und es hat die vorgeschriebene Diagonalenlänge. $\square$

b) Dem Quadrat $ABCD$ sei ein Rechteck $EFGH$ so einbeschrieben, wie es in der Aufgabenstellung angegeben ist. FG schneide die Diagonale AC in P und HE die Diagonale AC in Q.

   Da die Diagonale eines Quadrates als Symmetrieachse die Innenwinkel halbiert, gilt $\overline{\sphericalangle CAB} = 45°$. Wegen $EF \parallel AC$ folgt $\overline{\sphericalangle CAB} = \overline{\sphericalangle FEB} = 45°$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und wegen $\overline{\sphericalangle FEH} = 90°$ folgt $\overline{\sphericalangle HEA} = 45°$. Somit ist das Dreieck AEQ wegen der gleichgroßen Basiswinkel gleichschenklig, und es gilt $\overline{AQ} = \overline{QE}$.



Analog gilt $\overline{AQ} = \overline{HQ}$, also $\overline{EH} = 2\overline{AQ}$. Entsprechend folgt $\overline{FG} = 2\overline{CP}$. Wegen $\overline{EH} = \overline{FG}$ folgt hieraus $\overline{AQ} = \overline{CP}$. Schließlich gilt wegen $EF \parallel QP$ und $EQ \parallel FP$ auch $\overline{EF} = \overline{QP}$.

Für den Umfang u des Rechtecks $EFGH$ gilt folglich: $u = 2(\overline{EF} + \overline{EH}) = 2(\overline{QP} + \overline{AQ} + \overline{CP}) = 2\overline{AC}$.

Der Umfang jedes derartigen Rechtecks $EFGH$ beträgt somit $20,0$ cm.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.