17. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1977/1978

Aufgaben und Lösungen

17. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170721:

Anja hatte zum Geburtstag ihre beiden Freundinnen Cathrin und Eva eingeladen, mit denen sie nicht verwandt ist. Außerdem waren die Jungen Bernd, Dirk, Frank und Gerold eingeladen, von denen jeder ein Bruder eines der drei Mädchen ist. Nachdem diese sieben Personen an einem runden Tisch in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Vornamen Platz genommen hatten, stellte man fest:

(1) Keiner der Jungen saß neben seiner Schwester.

(2) Frank und Gerold sind Zwillinge.

Untersuche, ob aus den vorstehenden Aussagen die Namen der anwesenden Brüder jedes der drei Mädchen zu ermitteln sind; ist das der Fall, so sind diese Namen anzugeben!

Aufgabe 170722:

a) Beweise: Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar!

b) Untersuche, ob auch die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch 6 teilbar ist!

c) Ermittle eine weitere natürliche Zahl n ($n > 6$), für die gilt: Die Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch n teilbar!

Aufgabe 170723:

Von einem gleichschenkligen Dreieck sei nur bekannt, daß die Summe der Größen zweier Innenwinkel und eines Außenwinkels genau 300° beträgt. Dagegen sei nicht vorgeschrieben, welche der genannten Innenwinkel Basiswinkel sind und ob der genannte Außenwinkel zu einem dieser Innenwinkel gehört oder nicht.

Ermittle alle Möglichkeiten für die Größen der drei Innenwinkel dieses Dreiecks!

Aufgabe 170724:

Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 24 teilbar sind und deren Zifferndarstellung die Form $\overline{9x7y}$ hat!

Hierbei sind x und y durch je eine der zehn Ziffern (0,...,9) zu ersetzen.

17. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 170721:

Bernd saß neben Anja und Cathrin. Daher kann er wegen (1) nur Evas Bruder sein.

Dirk saß zwischen Cathrin und Eva, kann also ebenfalls wegen (1) nur Anjas Bruder sein.

Wegen (1) und (2) können Frank und Gerold weder Anjas noch Evas Brüder sein. Sie sind mithin Cathrins Brüder.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 170722:

a) Es sei a eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) = 5a + 10.$$

Es gilt der Satz: Wenn z ein Teiler sowohl von x als auch von y ist, so ist z auch ein Teiler der Summe $x + y$. Nun ist 5 ein Teiler von $5a$, und 5 ist auch ein Teiler von 10. Folglich gilt: $5|5a + 10$. $\square$

b) Ein Gegenbeispiel zeigt, daß die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen nicht immer durch 6 teilbar ist: Es gilt z.B. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$; $6 \nmid 21$.

c) Für $n = 7$ z.B. gilt:

$$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) + (a + 5) + (a + 6) = 7a + 21.$$

Nun gilt $7|7a$ und $7|21$, daraus folgt: $7|7a + 21$.

Eine natürliche Zahl, für die die Aussage wahr ist, ist somit z.B. $n = 7$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 170723:

Wenn ein gleichschenkliges Dreieck die geforderte Eigenschaft hat und darin x die Größe eines Basiswinkels, y die Größe des Winkels an der Spitze sowie x' und y' die Größen der zu x bzw. y gehörenden Außenwinkel (Nebenwinkel) sind, so gilt eine der Gleichungen

(1) $x + x + x' = 300°$,

(2) $x + x + y' = 300°$,

(3) $x + y + x' = 300°$,

(4) $x + y + y' = 300°$.

Wegen $x' + x = 180°$ bzw. $y' + y = 180°$ folgt sowohl aus (1) als auch aus (4) jeweils $x = 120° > 90°$ im Widerspruch dazu, daß x die Größe eines Basiswinkels ist.

Aus (2) erhält man, da nach dem Außenwinkelsatz $y' = 2x$ gilt, $4x = 300°$ und damit $x = 75°$, $y = 30°$.

Wegen $x + x' = 180°$ folgt aus (3) $y = 120°$ und $x = 30°$.

Als Möglichkeiten für die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks verbleiben mithin nur 75°; 75°; 30° oder 30°; 30°; 120°.

Diese Größen erfüllen die Forderungen der Aufgabe; denn wegen $75°+75°+30° = 180°$ bzw. $30°+30°+120° = 180°$ sind sie Innenwinkelgrößen von Dreiecken, und im ersten Fall beträgt die Summe der Größen der beiden Innenwinkel und des Außenwinkels $75°75° + (180° - 30°) = 75° + 75° + 150° = 300°$, im zweiten Falle $30° + 120° + (180° - 30°) = 30° + 120° + 150° = 300°$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 170724:

Wenn eine vierstellige Zahl die geforderten Eigenschaften hat, so folgt zunächst, daß sie durch 4 teilbar ist, also (nach der Teilbarkeitsregel für 4) auch die zweistellige Zahl mit der Zifferndarstellung $\overline{7y}$. Von den Zahlen 70, ..., 79 sind nur 72 und 76 durch 4 teilbar, also verbleiben nur die Möglichkeiten $y = 2$, $y = 6$. Nun folgt weiter:

Ist $y = 2$, so kommen für x auf Grund der Teilbarkeitsregel für 3 nur die Ziffern 0, 3, 6, 9 in Frage. Hiervon entfallen auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 8 jedoch 3 und 9, da 372 und 972 nicht durch 8 teilbar sind.

Ist $y = 6$, so kommen für x auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 3 nur die Ziffern 2, 5 und 8 in Frage. Hiervon entfallen jedoch 2 und 8, da 276 und 876 nicht durch 8 teilbar sind.

Also können nur die Zahlen 9 072, 9 672 und 9 576 die geforderten Eigenschaften haben.

Sie haben diese Eigenschaften; denn ihre Zifferndarstellung ist von der vorgeschriebenen Form, und sie sind durch 24 teilbar.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.