16. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1976/1977

Aufgaben und Lösungen

16. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160911:

Frank und Jens spielen ein Spiel, das sie "Autorennen" nennen. Sie haben dazu auf quadratisch-kariertem Papier eine Spielfläche durch einen Streckenzug $ABCDEFGA$ eingeschlossen, wobei A, B, C, D, E, F, G Gitterpunkte bezeichnen. Jeder Spieler soll von der "Startlinie" AG zur "Ziellinie" DE oder über sie hinaus gelangen, indem er nach folgenden Regeln einen Streckenzug $P_0P_1P_2...P_n$ bildet, der den Weg des Fahrzeuges darstellen soll, wobei die P_0, P_1, ..., P_n Gitterpunkte sind. Keine der Teilstrecken P_0P_1, P_1P_2, ... , $P_{n-1}P_n$ des Streckenzuges darf dabei die Randlinie des Spielfeldes (mit Ausnahme der Start- und Ziellinie) berühren oder schneiden. Unter einem "Zug" wird der Übergang von einem Punkt P_k zu dem nächsten Punkt P_{k+1} verstanden.

Die Spielregeln lauten:

(1) P_0 liegt auf AB

(2) Der erste "Zug" besteht aus der Strecke P_0P_1, wobei $\overline{P_0P_1} = 1$ (Seitenlänge des Grundquadrates) ist.

(3) Wenn bereits ein "Zug" $P_{k-1}P_k$ ausgeführt wurde, so findet man den nächsten "Zug" P_kP_{k+1} folgendermaßen:

   a) Man verlängert die Strecke $P_{k-1}P_k$ über P_k hinaus um sich selbst bis zu einem Punkt, der Q_k genannt sei.

   b) Man wählt entweder den Punkt Q_k oder einen seiner acht benachbarten Gitterpunkte als Punkt P_{k+1}.

   Hinweis: P_{k+1} muß innerhalb des Spielfeldes liegen, aber nicht notwendig Q_k.

Geben Sie für ein Spielfeld mit $A(0;0)$, $B(0;14)$, $C(7;21)$, $D(16;21)$, $E(16;18)$, $F(7;18)$, $G(7;0)$ einen "Fahrweg", d.h. einen Streckenzug $P_0P_1P_2...P_9$ an, bei dem die Ziellinie von der Teilstrecke P_8P_9 erreicht oder geschnitten wird!

Als Lösung genügt eine zeichnerische Darstellung oder die Angabe der Koordinaten der Punkte P_i ($i = 0, 1, 2, ..., 9$) ohne Begründung.

Aufgabe 160912:

Jemand behauptet, daß es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1 976 Stücke herzustellen:

Man teilt einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, danach wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke jeweils in genau 7 Teile u.s.w.

Ist es möglich, daß man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1 976 Papierstücke erhält?

Aufgabe 160913:

Es sei ΔABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB, der Länge $\overline{AB} = b$ und der Schenkellänge $2b$. Die Punkte D bzw. E seien die inneren Punkte von AC bzw. BC, in denen die Schenkel den Kreis mit dem Durchmesser AB schneiden. Man ermittle den Umfang des Vierecks $ABED$.

Aufgabe 160914:

Stellen Sie fest, ob Körper existieren, für die folgendes gilt!

	Kantenlänge bzw. Durchmesser in cm	Oberflächeninhalt in cm^2	Volumen in cm^3
Würfel	a	b	b
Kugel	c	d	d
reguläres Tetraeder	e	f	f

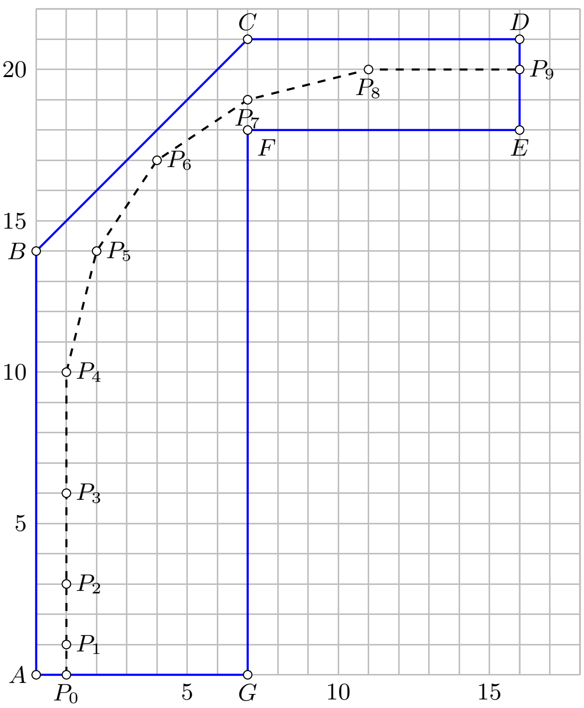
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, c, e, die diesen Bedingungen genügen! Dabei bezeichnen gleiche Buchstaben gleiche reelle Zahlen, während verschiedene Buchstaben nicht notwendig verschiedene Zahlen bezeichnen müssen.

16. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 160911:

Es gibt verschiedene Lösungen. Die Abbildung zeigt ein Beispiel.



Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Polster

Lösung 160912:

Angenommen es wäre möglich, auf diese Weise genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Da bei jeder Teilung 6 Papierstücke hinzukommen würden, müsste sich die Zahl 1976 in der Form

$$1976 = 6k + 7 \qquad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}$$

darstellen lassen, d.h. 1976 müsste bei Division durch 6 den gleichen Rest haben wie 7, nämlich 1.

Das ist nicht der Fall, also ist es nicht möglich, auf diese Weise aus 7 Papierstücken genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Oder: Bei der ersten Teilung kommen zu der ursprünglichen Anzahl von 7 Papierstücken 6 weitere hinzu. Da auch bei jeder weiteren Teilung genau 6 Papierstücke hinzukommen, ergibt sich als Summe aller Papierstücke stets eine ungerade Zahl, also niemals die gerade Zahl 1976. Die Behauptung ist somit falsch.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Polster

Lösung 160913:

Der Mittelpunkt von AB sei M. Dann ist Dreieck DAM gleichschenklig mit $DM = AM = \frac{b}{2}$

Daher ist $\sphericalangle MDA = \sphericalangle MAD = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$, also $\triangle DAM \sim \triangle ABC$.

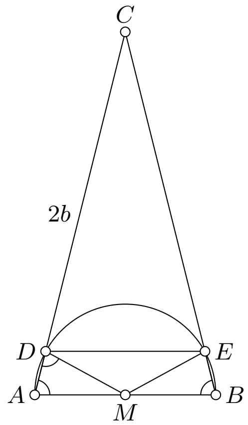
Folglich gilt $DA : AM = AB : BC = 1 : 2$, also $DA = \frac{1}{2}AM = \frac{b}{4}$ und daher

$$CD = AC - DA = 2b - \frac{b}{4} = \frac{7b}{4}$$

Ebenso erhält man $EB = \frac{b}{4}$ und $CA = \frac{7b}{4}$.

Also ist $DE \parallel AB$ und folglich $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. Daraus ergibt sich $DE : AB = CD : AC = 8 : 7$, also $DE = \frac{7b}{8}$. Somit beträgt der gesuchte Umfang

$$AB + BE + ED + DA = b + \frac{b}{4} + \frac{7b}{4} + \frac{b}{4} = \frac{19b}{8}$$



Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Polster

Lösung 160914:

Angenommen, es gibt solche Körper, dann muss gelten

1) für den Würfel

$$b = 6a^2$$
$$b = a^3 \quad \text{und damit} \quad a^3 = 6a^2$$
$$a = 6$$

Tatsächlich hat ein Würfel mit der Kantenlänge 6 cm den Oberflächeninhalt 216 cm^2 und das Volumen 216 cm^3.

2) für die Kugel

$$d = \frac{\pi}{6}c^3$$
$$d = \pi c^2 \quad \text{und damit} \quad \frac{\pi}{6}c^3 = \pi c^2$$
$$c = 6$$

Tatsächlich hat eine Kugel mit dem Durchmesser 6 cm einen Oberflächeninhalt von 36 cm^2 und ein Volumen von 36 cm^3.

3) für das reguläre Tetraeder

$$\begin{aligned} f &= e^2\sqrt{3} \\ f &= \frac{e^3}{12}\sqrt{2} \quad \text{und damit} \quad \frac{e^3}{12}\sqrt{2} = e^2\sqrt{3} \\ e &= \frac{12\sqrt{3}}{2} \\ e &= 6\sqrt{6} \end{aligned}$$

Tatsächlich hat ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge $6\sqrt{6}$ cm einen Oberflächeninhalt von $216\sqrt{3}$ cm^2 und ein Volumen von $216\sqrt{3}$ cm^3.

Also erfüllen genau die folgenden Zahlen die gestellten Bedingungen:

$$a = 6, \quad c = 6 \quad \text{und} \quad e = 6\sqrt{6}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Polster