16. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1976/1977

Aufgaben und Lösungen

16. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160731:

Von 12 Mädchen einer Klasse ist bekannt, daß alle im selben Jahr, aber keine zwei im gleichen Monat geboren sind. Multipliziert man jeweils die Zahl, die den Tag des Geburtsdatums angibt, mit der Zahl, die den Monat des Geburtsdatums angibt, so erhält man für die zwölf Mädchen die folgenden Produkte:

> Astrid 49, Beate 3, Christina 52, Doris 130, Evelyn 187, Friederike 300, Gudrun 14, Heike 42, Ines 81, Kerstin 135, Liane 128 und Martina 153.

Ermittle aus diesen Angaben den Geburtstag von jeder der zwölf Schülerinnen!

Aufgabe 160732:

Beweise den folgenden Satz:

> In jedem Dreieck ist die Länge jeder Seitenhalbierenden kleiner als der halbe Umfang des Dreiecks!

Aufgabe 160733:

Unter "Primzahldrillingen" wollen wir drei Primzahlen verstehen, die sich in der Form p, $p+2$, $p+4$ darstellen lassen.

Beweise, daß es genau eine Zahl p gibt, für die p, $p+2$, $p+4$ "Primzahldrillinge" sind, und ermittle diese!

Aufgabe 160734:

Im Rahmen der Hans-Beimler-Wettkämpfe an der Schule beteiligte sich Fritz am Entfernungsschätzen.

a) Bei seinem Schätzwert von 350 Metern erfährt er, daß dieser zu klein war, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung. Ermittle die wahre Entfernung!

b) Wie groß wäre die wahre Entfernung, wenn der Schätzwert von Fritz zu groß gewesen wäre, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung?

Aufgabe 160735:

Ermittle alle Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen, für die die Gleichung $2x + 3y = 27$ erfüllt ist!

Aufgabe 160736:

Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 9,1$ cm, $b = 6,3$ cm, $c = 6,7$ cm und $d = 5,0$ cm!

Dabei sei a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und d die der Seite AD.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

16. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 160731:

Die Lösung läßt sich z.B. mit Hilfe folgender Tabelle ermitteln, wobei für jedes der Mädchen der Anfangsbuchstabe seines Vornamens gesetzt wurde:

Name	Produkt	Primfaktorenzerlegung	mögliche Geburtsdaten	tatsächliches Datum
A	49	$7 \cdot 7$	7.7.	7.7.
B	3	$(1) \cdot 3$	3.1. oder 1.3.	3.1.
C	52	$2 \cdot 2 \cdot 13$	26.2. oder 13.4.	13.4.
D	130	$2 \cdot 5 \cdot 13$	26.5. oder 13.10.	13.10.
E	187	$11 \cdot 17$	17.11.	17.11.
F	300	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$	30.10. oder 25.12.	25.12.
G	14	$(1) \cdot 2 \cdot 7$	14.1. oder 7.2. oder 2.7.	7.2.
H	42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	21.2. oder 14.3. oder 7.6. oder 6.7.	7.6.
I	81	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	27.3. oder 9.9.	27.3.
K	135	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$	27.5. oder 15.9.	27.5.
L	128	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	16.8.	16.8.
M	153	$3 \cdot 3 \cdot 17$	17.9.	17.9.

Die tatsächlichen Daten ermittelt man folgendermaßen:

1) Gibt es jeweils nur eine Möglichkeit für das Geburtsdatum, so ist für dieses Mädchen das Geburtsdatum dann festgelegt (gilt für A, E, L, M).

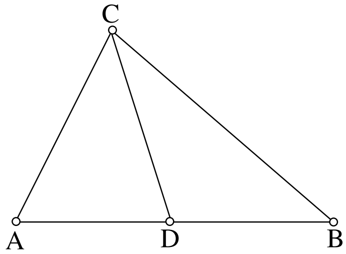
2) Nun streicht man bei den verbleibenden Mädchen die Daten, deren Monatsnummer bereits bei den unter 1) genannten Daten auftritt, da laut Aufgabe in jedem Monat genau eines der gesuchten Geburtsdaten liegt (gilt für G, H, I, K). Bleibt dabei bei einem Mädchen nur ein Datum übrig, ist damit sein Geburtsdatum ermittelt (I, K).

3) Indem man analog fortfährt, werden die restlichen Daten ermittelt.

   Reihenfolge: Streichung bei B, D, H; Ermittlung des endgültigen Datums bei B, D; Streichung und damit endgültige Datenermittlung bei F, G und dann bei C, H.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 160732:



O.B.d.A. werde in dem beliebigen Dreieck ABC die Seitenhalbierende CD der Seite AB betrachtet (siehe Bild).

Es ist zu beweisen, daß

$$\overline{DC} < \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}\right)$$

gilt.

Nach der Dreiecksungleichung gilt im Dreieck ADC: $\overline{DC} < \overline{AD}+\overline{AC}$ und im Dreieck DBC: $\overline{DC} < \overline{DB}+\overline{BC}$.

Durch Addition beider Ungleichungen erhält man mit $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB}$:

$$\begin{aligned}2 \cdot \overline{DC} &< \overline{AD} + \overline{AC} + \overline{DB} + \overline{BC}\\ 2 \cdot \overline{DC} &< \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}\\ \overline{DC} &< \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}\right). \quad \square\end{aligned}$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 160733:

Angenommen, für eine Primzahl p seien p, $p+2$, $p+4$ Primzahldrillinge. Wenn p bei Division durch 3 den Rest 1 ließe, so wäre $p+2$ durch 3 teilbar und gleichzeitig (wegen $p > 1$) größer als 3, also nicht Primzahl.

Wenn p bei Division durch 3 den Rest 2 ließe, so wäre $p+4$ durch 3 teilbar und gleichzeitig größer als 3, also nicht Primzahl.

Also muß p durch 3 teilbar und folglich selbst die Primzahl 3 sein.

In der Tat sind für $p = 3$ auch $p + 2 = 5$ und $p + 4 = 7$ Primzahlen. Somit gibt es, wie behauptet, genau eine Zahl p, für die p, $p + 2$, $p + 4$ Primzahldrillinge sind; dies ist die Zahl 3 (bzw. diese Primzahldrillinge sind 3, 5 und 7).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 160734:

a) Die wahre Entfernung sei x Meter. Der Schätzwert war um 12,5% von x Metern, d.h. um $\frac{1}{8}x$ Meter zu klein. Das bedeutet, daß der Schätzwert genau $\frac{7}{8}x$ Meter betrug. Mithin gilt:

$$\frac{7}{8}x = 350, \quad \text{also} \quad x = \frac{350 \cdot 8}{7} = 400.$$

Die wahre Entfernung beträgt also 400 m.

b) In diesem Falle sei die wahre Entfernung y Meter. Der Schätzwert wäre um $\frac{1}{8}y$ Meter zu groß gewesen, d.h., er hätte $\frac{9}{8}y$ Meter betragen. Folglich gilt:

$$\frac{9}{8}y = 350, \quad \text{also} \quad y = \frac{350 \cdot 8}{9} = 311\frac{1}{9}.$$

In diesem Falle würde die wahre Entfernung $311\frac{1}{9}$ m betragen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 160735:

Angenommen, $(x; y)$ sei ein Paar natürlicher Zahlen, das die Gleichung $2x + 3y = 27$ erfüllt. Dann folgt $3y = 27 - 2x$, also ist insbesondere x ein Vielfaches von 3. Weiter folgt

(1) $y = 9 - \frac{2}{3}x$.

Da y eine natürliche Zahl ist, gilt $\frac{2}{3}x \leq 9$, also $x \leq \frac{27}{2}$; daher kommen nur folgende Werte für x in Frage: $x = 0$, $x = 3$, $x = 6$, $x = 9$ und $x = 12$.

Nach (1) ergibt eich hierzu jeweils $y = 9$, $y = 7$, $y = 5$, $y = 3$ bzw. $y = 1$. Also haben höchstens die Zahlenpaare (0;9), (3;7), (6;5), (9;3) und (12;1) die verlangten Eigenschaften.

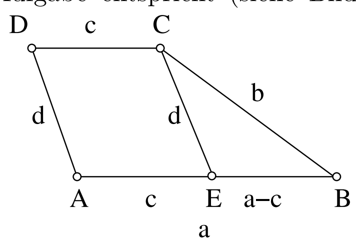
Sie haben tatsächlich diese Eigenschaften, denn sie bestehen aus natürlichen Zahlen, und es gilt

$$\begin{array}{ccc} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 9 = 27 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 27 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 27 \\ 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 = 27 & 2 \cdot 12 + 3 \cdot 1 = 27 & \end{array}$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 160736:

I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Bild).



Dann ist $a > c$. Daher schneidet die Parallele zu AD durch C die Seite AB in einem inneren Punkte E, für den $\overline{AE} = c$, also $\overline{EB} = a - c$ gilt.

Daraus folgt, daß ein Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Wir konstruieren das Teildreieck EBC aus $\overline{EB} = a - c$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{EC} = d$.

(2) Wir verlängern BE über E um c und erhalten A,

(3) Wir zeichnen die Parallele zu AB durch C.

(4) Wir zeichnen die Parallele zu CE durch A.

Der Schnittpunkt der beiden Parallelen aus (3) und (4) sei D genannt.

III. Jedes so erhaltene Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Das Viereck $AECD$ ist ein Parallelogramm, also gilt $\overline{CD} = \overline{AE} = c$ und $\overline{AD} = \overline{EC} = d$, und $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$. Nach Konstruktion ist $\overline{AB} = \overline{BE} + \overline{EA} = a - c + c = a = 9,1$ cm, $\overline{BC} = b = 6,3$ cm, $\overline{CD} = \overline{AE} = c = 6,7$ cm und $\overline{AD} = \overline{EC} = d = 5,0$ cm.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist nach dem Kriterium (sss) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, weil jede der drei Seitenlängen $a - c = 2,4$ cm, $b = 6,3$ cm und $d = 5,0$ cm kleiner als die Summe der beiden anderen ist.

Die Konstruktionsschritte (2), (3) und (4) sind danach stets eindeutig ausführbar. Mithin existiert bis auf Kongruenz genau ein Trapez $ABCD$ der geforderten Art.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.