16. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1976/1977

Aufgaben und Lösungen

16. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160721:

Nach der Jugendweihefeier ließen sich alle Schüler einer Klasse einzeln fotografieren. Jeder ließ von seinem Foto genügend viele Abzüge herstellen, und dann tauschte jeder Schüler dieser Klasse mit jedem seiner Klassenkameraden sein Foto aus.

Wieviel Schüler tauschten insgesamt in dieser Klasse miteinander die Fotos aus, wenn dabei genau 812 Fotografien ihren Besitzer wechselten?

Aufgabe 160722:

Eine Gärtnerische Produktionsgenossenschaft verkaufte in den Monaten August bis November Äpfel. Der Preis für 1 kg Äpfel war im September um 20% niedriger als im August, im November hingegen um 20% höher als im September.

Waren die Äpfel im November billiger, im Preis gleich oder teurer als im August?

Falls der Preis im November von dem im August abwich, ist anzugeben, um wieviel Prozent des Augustpreises der Novemberpreis von diesem abwich.

Aufgabe 160723:

Konstruiere aus $a = 5,0$ cm und $b = 7,0$ cm ein Dreieck ABC, bei dem die Mittelsenkrechten der Seiten BC und AC aufeinander senkrecht stehen! Dabei seien a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC.

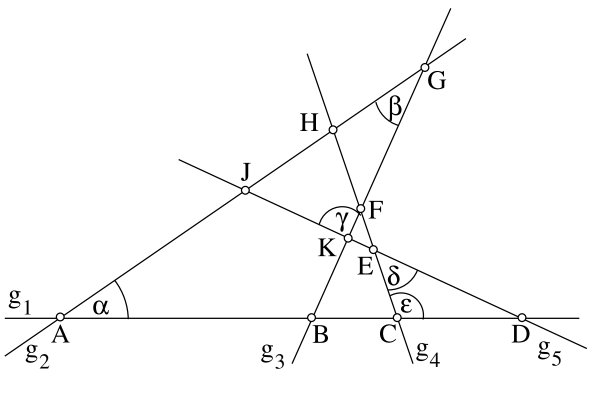
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 160724:

Es seien g_1, g_2, g_3, g_4 und g_5 fünf Geraden, die einander wie im Bild angegeben paarweise in den voneinander verschiedenen Punkten A, B, C, D, E, F, G, H, J und K schneiden.

Gegeben seien die Größen der Winkel $\sphericalangle BAJ$, $\sphericalangle HGF$, $\sphericalangle FKJ$ und $\sphericalangle DEC$ in dieser Reihenfolge α, β, γ und δ genannt.

Ermittle die Größe ϵ des Winkels $\sphericalangle DCE$!



16. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 160721:

Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Schüler dieser Klasse mit x, dann erhielt jeder Schüler $(x-1)$ Fotografien. Eine natürliche Zahl $x > 1$ entspricht mithin genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn für sie $x(x-1) = 812$ gilt.

Nun sind x und $x-1$ benachbarte natürliche Zahlen. Da $812 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 29$ ist, läßt sich 812 nur auf die folgenden Weisen in ein Produkt aus zwei natürlichen Zahlen zerlegen:

$$812 = 1 \cdot 812 = 2 \cdot 406 = 4 \cdot 203 = 7 \cdot 116 = 14 \cdot 58 = 28 \cdot 29.$$

Dabei sind nur im Falle $28 \cdot 29$ die beiden Faktoren benachbarte natürliche Zahlen. Daher ist $x = 29$.

Es tauschten also 29 Schüler in der genannten Klasse ihre Fotos aus.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 160722:

Der Preis für 1 kg Äpfel betrage im August x Mark, dann beträgt er im September $(x - \frac{1}{5})$ Mark $= \frac{4}{5}x$ Mark. Im November betrug der Preis $\frac{4}{5}x$ Mark $+ \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}x$ Mark $= \frac{24}{25}$ Mark.

Da $\frac{24}{25}x < x$ ist, waren die Äpfel im November billiger als im August.

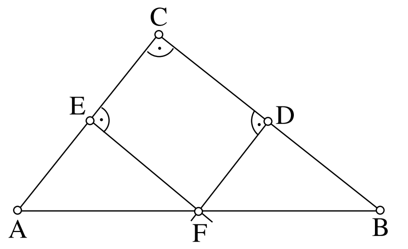
Aus $x - \frac{24}{25}x = \frac{1}{25}x = \frac{4}{100}x$ folgt, daß der Preis für die Äpfel im November um 4% ihres Preises im August von diesem abwich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 160723:

I. Angenommen, es gäbe ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Der Mittelpunkt der Seite BC sei D, der von AC sei E. Der Schnittpunkt der senkrecht aufeinanderstehenden Mittelsenkrechten miteinander sei mit F bezeichnet.



Wegen des Winkelsummensatzes, angewandt auf das Viereck $DCEF$, folgt mithin, daß $\sphericalangle ECD (\cong \sphericalangle ACB)$ ein rechter Winkel ist. Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man konstruiert einen rechten Winkel, dessen Scheitel C genannt sei.

(2) Auf dem einen seiner Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge $5,0\,\text{cm}$ ab, deren zweiter Endpunkt B genannt sei, auf dem anderen Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge $7,0\,\text{cm}$ ab, deren zweiter Endpunkt A genannt sei.

III. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion haben BC bzw. AC die Länge $5,0\,\text{cm}$ bzw. $7,0\,\text{cm}$. Die Mittelsenkrechte von BC ist, da auch AC senkrecht auf BC steht, parallel zu AC. Also ist sie senkrecht zur Mittelsenkrechten von AC.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC der geforderten Art.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 160724:

Der Winkel $\sphericalangle DBG$ hat als Außenwinkel des Dreiecks ABG die Größe $\alpha+\beta$. Als Scheitelwinkel von $\sphericalangle FKJ$ hat $\sphericalangle BKD$ die Größe γ. Mit Hilfe des Satzes über die Summe der Innenwinkel im Dreieck ergibt sich die Größe des Winkels $\sphericalangle CDE$ im Dreieck BDK zu $180° - \alpha - \beta - \gamma$. Mit Hilfe des gleichen Satzes, angewandt auf das Dreieck CDE erhält man für die Größe ϵ des Winkels $\sphericalangle DCE$:

$$\begin{aligned}\epsilon &= 180° - (180° - \alpha - \beta - \gamma + \delta)\\ &= 180° - 180° + \alpha + \beta + \gamma - \delta\\ &= \alpha + \beta + \gamma - \delta.\end{aligned}$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.