15. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1975/1976

Aufgaben und Lösungen

15. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150611:

Die Volksrepublik Polen lieferte vom 6. Dezember 1974 (erster Liefertag) bis zum 18. Dezember 1974 (letzter Liefertag) eine Gesamtmenge von 132 000 t Steinkohle und 24 000 t Koks auf dem Wasserwege in die Hauptstadt der DDR. Die Lieferung erfolgte auf Schleppkähnen mit einem Fassungsvermögen von je 600 t.

Wieviel dieser Kahnladungen trafen im angegebenen Zeitraum durchschnittlich an jedem Tag in Berlin ein (wobei Sonntage als Liefertage mitgerechnet seien)?

Aufgabe 150612:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{a} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{b}\\ - & & & & -\\ \boxed{c} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{d}\\ \cline{1-1}\cline{5-5} \boxed{e} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{a} \end{array}$$

In dem abgebildeten Kryptogramm sind in die Kästchen statt der Buchstaben Ziffern so einzusetzen, daß alle fünf angegebenen Aufgaben richtig gelöst sind.

Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Als Lösung genügt nicht, wie bei solchen "Zahlenrätseln" sonst üblich, die Angabe von gesuchten Zahlen. Es muß nachgewiesen werden, daß die angegebenen Zahlen alle gestellten Forderungen erfüllen und daß sie die einzigen Zahlen sind, die das tun.

Aufgabe 150613:

Im Jahre 1770 gab der Schweizer Mathematiker Leonard Euler ein Lehrbuch der Algebra heraus, das mehr als 100 Jahre lang zu den meistgelesenen Algebrabüchern gehörte. Eine Aufgabe aus diesem Lehrbuch lautet:

> Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der größere der beiden Summanden 49 mal so groß ist wie der andere.
>
> Untersuche, ob eine solche Zerlegung möglich ist, und ermittle, wenn dies der Fall ist, die beiden dabei auftretenden Summanden!

Aufgabe 150614:

Eine Pioniergruppe sammelt Altpapier. Bei der Abrechnung stellte sich heraus, daß das Sammelergebnis der letzten beiden Tage ein Viertel der insgesamt erreichten Menge betrug, und zwar waren am letzten Tag 27 kg gesammelt worden und am vorletzten Tag 6 kg weniger als am letzten Tag.

Wieviel Kilogramm betrug die insgesamt gesammelte Menge Altpapier?

15. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 150611:

Wegen $132\,000 + 24\,000 = 156\,000$ betrug die gelieferte Gesamtmenge 156 000 t. Wegen $132\,000 : 600 = 220$, $24\,000 : 600 = 40$ und $220 + 40 = 260$ oder: wegen $156\,000 : 600 = 260$ waren das insgesamt 260 Kahnladungen. Da es sich vom 6. bis 18. Dezember 1974 um insgesamt 13 Liefertage handelte, trafen wegen $260 : 13 = 20$ täglich durchschnittlich 20 dieser Kahnladungen aus der Volksrepublik Polen in Berlin ein.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 150612:

Die fünf im Kryptogramm enthaltenen Aufgaben lauten:

(1) $a \cdot a = b$,

(2) $c \cdot a = d$,

(3) $e \cdot a = a$,

(4) $a - c = e$,

(5) $b - d = a$.

Wenn fünf Ziffern a, b, c, d, e diese Aufgaben richtig lösen und sämtlich untereinander verschieden sind, so folgt $a \neq 0$; denn für $a = 0$ wäre wegen (1) auch $b = 0$.

Aus (3) folgt hiernach $e = 1$.

Ferner folgt $c \neq 0$; denn für $c = 0$ wäre wegen (2) auch $d = 0$.

Hiernach und wegen $c \neq e$ ist $c \geq 2$, nach (4) also $a = c + e = 3$. Andererseits gilt nach (1) und weil b einstellig ist, $a \cdot a \leq 9$, also $a \leq 3$. Folglich muß $a = 3$ sein, nach (4) somit $c = a - e = 2$. Aus (1), (2) erhält man nun $b = 9$, $d = 6$. Daher kann nur die Eintragung den Bedingungen der Aufgabenstellung entsprechen.

Sie genügt diesen Bedingungen; denn die für a, b, c, d, e eingesetzten Ziffern 3, 9, 2, 6, 1 sind untereinander verschieden, und alle im Kryptogramm enthaltenen Aufgaben sind mit diesen Ziffern richtig gelöst.

Also hat genau die angegebene Eintragung die geforderten Eigenschaften.

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{3} & \cdot & \boxed{3} & = & \boxed{9} \\
- & & & & - \\
\boxed{2} & \cdot & \boxed{3} & = & \boxed{6} \\
\hline
\boxed{1} & \cdot & \boxed{3} & = & \boxed{3}
\end{array}$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 150613:

Wenn eine solche Zerlegung möglich ist, so gilt für sie:

Bezeichnet man den kleineren der beiden Summanden mit x, dann lautet der größere $49x$, und es gilt $x + 49x = 25$, also $50x = 25$, woraus man $x = \frac{1}{2}$ erhält.

Also kann nur eine Zerlegung die geforderten Eigenschaften haben, in der der kleinere Summand $\frac{1}{2}$ und der größere $49 \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{2}$ lautet.

Dies ist auch in der Tat eine Zerlegung der gesuchten Art; denn für diese beiden Summanden ist $\frac{1}{2} + \frac{49}{2} = \frac{50}{2} = 25$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 150614:

Am letzten Tag waren 27 kg gesammelt worden, am vorletzten Tag wegen $27 - 6 = 21$, also 21 kg.

Wegen $27 + 21 = 48$ betrug das Sammelergebnis der letzten beiden Tage daher 48 kg. Da dies ein Viertel der insgesamt erreichten Menge war, ist diese das Vierfache von 48 kg, wegen $4 \cdot 48 = 192$ also 192 kg Altpapier.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission