14. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1974/1975

Aufgaben und Lösungen

14. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140921:

An einer Fußballmeisterschaft der DDR beteiligen sich 14 Mannschaften der Oberliga. In der ersten Halbserie spielen je zwei dieser Mannschaften genau einmal gegeneinander.

Es ist zu beweisen, daß es in der Zeit dieser Halbserie nach jedem Spieltag zwei Mannschaften der Oberliga gibt, die die gleiche Anzahl von Spielen ausgetragen haben.

Aufgabe 140922:

Es sei ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck, H sei der Schnittpunkt seiner Höhen und D, E, F deren Fußpunkte, wobei D auf BC, E auf CA und F auf AB liegen mögen.

Man beweise, daß dann $\overline{AH} \cdot \overline{HD} = \overline{BH} \cdot \overline{HE} = \overline{CH} \cdot \overline{HF}$ gilt.

Aufgabe 140923:

Es ist die kleinste positive ganze Zahl zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist.

Aufgabe 140924:

AB sei eine in der Ebene ε gegebene Strecke der Länge a. In ε sei g die Gerade durch A, die senkrecht zu AB ist. In B sei die Senkrechte s auf die Ebene ε errichtet. Schließlich seien C ein von A verschiedener Punkt auf g und D ein von B verschiedener Punkt auf s.

a) Man beweise, daß es eine Kugel gibt, die durch die Punkte A, B, C und D geht.

b) Man berechne den Radius einer solchen Kugel für den Fall, daß $\overline{CA} = a\sqrt{2}$ und $\overline{BD} = a\sqrt{3}$ gilt.

14. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 140921:

Es seien $a_1, a_2, ..., a_{14}$ die Anzahlen der Spiele, die die 14 Mannschaften zu einem bestimmten Zeitpunkt absolviert haben. Für die Gesamtzahl K der Spiele aller 14 Mannschaften gilt dann $K = \frac{1}{2}(a_1+a_2+...+a_{14})$. (Der Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich daraus, dass bei der Summe jedes Spiel doppelt gezählt wird.)

Wir nehmen nun an, dass keine zwei Mannschaften dieselbe Anzahl von Spielen ausgetragen haben, dass also alle Werte a_i verschieden sind. Da alle Werte a_i der Menge $\{0, 1, 2, ..., 13\}$ angehören und diese Menge 14 Elemente hat, muss jeder Wert aus $\{0, 1, 2, ..., 13\}$ von genau einem der Werte a_i angenommen werden. Folglich ist

$$K = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_{14}) = \frac{1}{2}(0 + 1 + 2 + ...13) = \frac{13 \cdot 14}{4} = \frac{91}{2}$$

Hier erhalten wir einen Widerspruch, da $\frac{91}{2}$ keine ganze Zahl ist. Somit war unsere obige Annahme falsch, und es gibt zwei Mannschaften, die exakt gleich viele Spiele ausgetragen haben.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

2. Lösung:

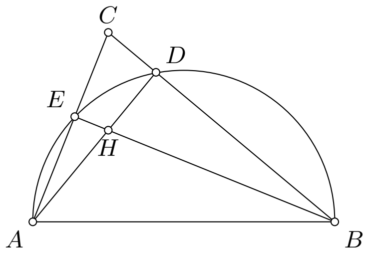
Da zu jedem Zeitpunkt der betrachteten Halbserie jede Mannschaft gegen jede andere höchstens einmal gespielt hat, ist die Anzahl der Partien, an der eine Mannschaft beteiligt war, immer durch $14 - 1 = 13$ nach oben beschränkt. Damit gibt es aber nur 14 verschiedene mögliche Anzahlen an Spielen, die eine Mannschaft gespielt haben kann.

Hätten zu einem Zeitpunkt keine zwei Mannschaften dieselbe Anzahl an Spielen, ginge das also nur, wenn jede der 14 möglichen Anzahlen auch vorkommt. Dann müsste es aber sowohl eine Mannschaft geben, die gegen keine andere gespielt hat, wie auch eine, die gegen alle 13 anderen gespielt hat. Beides zugleich kann aber nicht eintreten, was den gewünschten Widerspruch erzeugt und die Behauptung beweist.

Bemerkung: Dieser Ansatz nutzt nicht die konkrete Anzahl beteiligter Mannschaften und lässt sich auf beliebige Anzahlen > 1 verallgemeinern.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 140922:



Da $\sphericalangle AEB = 90° = \sphericalangle ADB$ gilt, ist das Viereck $ABDE$ nach Umfangswinkelsatz ein Sehnenviereck. Nach Sehnensatz gilt daher $AH \cdot HD = BH \cdot HE$. Die andere Gleichung folgt analog.

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon

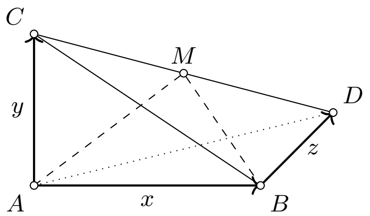
Lösung 140923:

Die Primfaktorzerlegung von 588 ist: $588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$. Ist z^3 die dritte Potenz einer positiven ganzen Zahl z, so muss z^3 jeden Primfaktor von z mindestens dreimal enthalten.

Das kleinste Vielfache mit je drei Primfaktoren der Zerlegung von 588 ist $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$. Dessen dritte Wurzel ist $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. $z = 42$ ist die gesuchte Zahl.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Polster

Lösung 140924:



a) *Behauptung:* Der Mittelpunkt M der Strecke CD hat von den Punkten A, B, C, D jeweils den gleichen Abstand und kann somit als Mittelpunkt der gesuchten Kugel gewählt werden.

Beweis: Die Vektoren $x := B - A, y := C - A, z := D - B$ stehen per Definition paarweise aufeinander senkrecht. Es gilt:

$$\begin{aligned} B &= A + x, \\ C &= A + y, \\ D &= B + z = A + x + z, \\ M &= \frac{1}{2}(C + D) = A + \frac{x + y + z}{2}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} M - A &= \frac{x + y + z}{2}, \\ M - B &= \frac{-x + y + z}{2}, \\ M - C &= \frac{x - y + z}{2} \\ M - D &= \frac{-x + y - z}{2} \end{aligned}$$

Wegen der Orthogonalität von x, y, z folgt

$$\left\| \frac{\pm x \pm y \pm z}{2} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2},$$

was die Behauptung impliziert. $\square$

b) In diesem Fall ist $\|x\| = a$, $\|y\| = a\sqrt{2}$, $\|z\| = a\sqrt{3}$. Der Radius r der Kugel ist somit

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2a^2 + 3a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon