14. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1974/1975

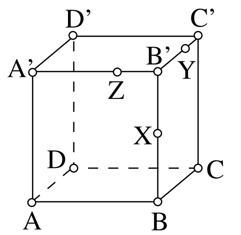
Aufgaben und Lösungen

14. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140911:

Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, A', B', C', D' und der Kantenlänge a (siehe Abbildung). Auf BB' liege ein Punkt X, auf $B'C'$ ein Punkt Y und auf $A'B'$ ein Punkt Z, wobei diese Punkte beliebig gelegen, aber von B' verschieden sein sollen.



Wir betrachten dann für jede solche Wahl von X, Y, Z den geschlossenen Streckenzug $XYZX$. Als Länge dieses Streckenzuges bezeichnet man die Summe der Längen $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ und $\overline{ZX}$.

a) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit größter Länge gibt!

b) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit kleinster Länge gibt!

c) Falls es bei a) oder b) einen solchen Streckenzug gibt, so ermitteln Sie seine Länge!

Aufgabe 140912:

Peter behauptet, man könne bei einem beliebig gegebenen Dreieck ABC, in dem D der Mittelpunkt der Seite AB ist, allein durch Längenvergleich der Seitenhalbierenden CD und der halben Seite AD feststellen, ob das Dreieck bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel hat.

Untersuchen Sie, ob Peters Behauptung richtig ist!

Aufgabe 140913:

An eine im dekadischen System geschriebene natürliche Zahl z werden folgende Forderungen gestellt:

(1) Die Quersumme von z soll 11 betragen.

(2) Die Ziffern von z sollen paarweise verschieden sein.

(3) Die Zahl z soll durch 11 teilbar sein.

Ermitteln Sie alle Zahlen z, die die Forderungen (1) bis (3) erfüllen! len!

Aufgabe 140914:

Bettina und Axel sind beide Briefmarkensammler, nun schlägt Axel Bettina folgendes Spiel um Briefmarken vor:

Jeder schreibt, unabhängig von dem anderen (ohne dem anderen Einsicht zu gewähren) genau eine der drei Zahlen 1, 2 oder 3 auf einen Zettel. Danach werden die Zettel aufgedeckt. Ist nun die von Axel notierte Zahl kleiner oder gleich der von Bettina notierten, so wird die von Axel notierte Zahl von der von Bettina notierten Zahl subtrahiert, in den anderen Fällen werden die Zahlen addiert.

Ist die so entstandene Zahl kleiner als 3, so darf sich Axel so viele Briefmarken von Bettina nehmen, wie diese Zahl angibt; in den anderen Fällen darf sich entsprechend Bettina von Axel Briefmarken nehmen. Nachdem sich Bettina diese komplizierten Regeln genau durchdacht hat, sagt sie zu Axel, daß dieses Spiel keinen Zweck hätte. Es könne nämlich jeder von beiden so spielen, daß er mit Sicherheit nicht verliert. Das würde aber bedeuten, daß keiner vom anderen eine Marke nehmen dürfte.

Ist diese Meinung Bettinas richtig?

14. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 140911:

I. Für alle der Aufgabenstellung entsprechenden Punkte X, Y, Z gilt: Setzt man $|B'X| = x$, $|B'Y| = y$, $|B'Z| = z$, so ist $0 < x, y, z \leq a$. Ferner ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|XY| = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$|YZ| = \sqrt{y^2 + z^2},$$
$$|ZX| = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Daraus folgt

$$0 < |XY| + |YZ| + |ZX| \leq 3\sqrt{2a^2}.$$

II. Bei der laut Aufgabenstellung zulässigen Wahl $X = B$, $Y = C'$, $Z = A'$ ergibt sich $x = y = z = a$, also

$$|XY| + |YZ| + |ZX| = 3\sqrt{2a^2}.$$

III. Wählt man zu beliebigen der Aufgabenstellung entsprechenden Punkten X, Y, Z einen ebenfalls der Aufgabenstellung entsprechenden Punkt $X*$ zwischen B' und X und setzt man $|B'X*| = x*$, so ist $0 < x* < x$, also

$$|X*Y| + |YZ| + |ZX*| = \sqrt{x*^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x*^2}$$
$$< |XY| + |YZ| + |ZX|.$$

Aus I. und II. folgt:

a) Es gibt unter den in der Aufgabe genannten Streckenzügen einen mit größter Länge, nämlich den für $X = B$, $Y = C'$, $Z = A'$ entstehenden.

c) Seine Länge beträgt $3a\sqrt{2}$.

Aus III folgt:

b) Zu jedem der genannten Streckenzüge gibt es einen mit einer kleineren Länge, d.h., es gibt keinen mit kleinster Länge.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 140912:

Die Größen der Innenwinkel von ΔABC bei A, B, C seien α, β, γ. Ist $|AD| = |DB| < |CD|$, so gilt, da im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, $|\sphericalangle ACD| < |\sphericalangle CAD|$ und $|\sphericalangle DCB| < |\sphericalangle CBD|$, also

$$\gamma = |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle DCB| < \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

und daher $2\gamma < 180^\circ$, woraus $\gamma < 90^\circ$ folgt. Steht in der ersten Ungleichung das Gleichheitszeichen bzw. das Größerzeichen statt des Kleinerzeichens, so gilt dasselbe auch für die folgenden Ungleichungen.

Daher ist Peters Behauptung richtig: das Dreieck ABC hat bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel, je nachdem, ob $|AB|$ kleiner, gleich oder größer als $2|CD|$ ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 140913:

Die Teilbarkeitsregel für die Zahl 11 besagt: eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Da die Quersumme der Zahl genau 11 sein muß, folgt daraus, daß die alternierende Quersumme 0 oder 11 ist.

Damit kann die gesuchte Zahl nicht zweistellig sein, denn wäre die alternierende Quersumme Null, so müßten beide Ziffern gleich sein, was (2) widerspricht; und die alternierende Quersumme 11 kann bei einer zweistelligen Zahl nicht erreicht werden.

Die gesuchten Zahlen können aber dreistellig sein: genau dann, wenn die mittlere Ziffer Null ist, erhält man für die alternierende Quersumme den Wert der Quersumme $\Rightarrow$ Regel: die erste und dritte Ziffer müssen zusammen 11 ergeben. Dies gilt für 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902. Nach einer anderen Regel kann bei einer dreistelligen Zahl keine alternierende Quersumme von 11 bei einer Quersumme von 11 erreicht werden.

Die alternierende Quersumme Null bei einer dreistelligen Zahl mit der Quersumme 11 kann nicht auftreten, da folgendes gelten muß: $a_1+a_2+a_3 = 11 \Rightarrow a_1+a_3 = 11-a_2$ bzw. $a_1+a_3 = a_2$. Dies ergibt zusammengefaßt: $11 - a_2 = a_2 \Rightarrow a_2 = 5,5$.

Bei einer vier- und mehrstelligen Zahl mit Quersumme 11 kann eine alternierende Quersumme 11 nicht auftreten, da mindestens eine Ziffer ungleich Null mit einem negativen Vorzeichen behaftet wird.

Für eine vierstellige Zahl gilt allgemein für die Quersumme und die alternierende Quersumme Null wieder: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 = 11 - a_2 - a_4$ bzw. $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$. Und zusammengefaßt: $11 - a_2 - a_4 = a_2 + a_4 \Rightarrow a_2 + a_4 = 5,5$, was nicht auftreten kann.

Für eine fünfstellige Zahl gilt nun für die Quersumme und die alternierende Quersumme Null: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 + a_5 = 11 - a_2 - a_4$ bzw. $a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4$. Und zusammengefaßt: $11 - a_2 - a_4 = a_2 + a_4 \Rightarrow a_2 + a_4 = 5,5$, was nicht auftreten kann.

Die gesuchte Zahl kann nicht sechs- und mehrstellig sein, da bei 6 verschiedenen Ziffern die minimale Quersumme $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ den Wert 11 übersteigt.

Damit sind die einzigen Lösungen die der dreistelligen Zahlen wie oben angegeben.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 140914:

Bettina hat recht. Wenn nämlich Axel auf seinen Zettel 1 schreibt, so ist seine Zahl in keinem Fall größer als die Bettinas, es ist also die Differenz zu bilden. Diese ist kleiner als 3, daher darf sich Bettina keine Marke von Axel nehmen. Wenn Bettina ebenfalls 1 notiert, sind folgende 3 Fälle möglich: Axel schreibt 1, 2 oder

3. Im ersten Fall ist die Differenz zu bilden. Sie ist 0, also darf sich Axel keine Marke von Bettina nehmen. Wenn mithin Axel nd Bettina beide 1 schreiben, geht jeder von beiden sicher, keine Marke zu verlieren.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Quellenverzeichnis

(12) Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag